



هندسه ۲

پایه یازدهم
رشته ریاضی و فیزیک

مؤلف
آرش عمید

فرمول
لیست

سلام

آرش عمید هستم. از عنوان کتاب یعنی «فرمول بیست» معلوم است که این کتاب برای ۲۰ شدن شما در هر آزمون تشریحی و با هر سطحی، نوشته شده است. این کتاب حاصل تجربه ۲۵ سال تدریس من در درس هندسه و دیدن آزمون‌های نهایی مختلف در نظام قدیم و جدید آموزشی است.

در این کتاب مطالب به صورت زیر است:

۱. در درسنامه، خط به خط کتاب درسی و همه تمرینات، کار در کلاس‌ها و فعالیت‌های کتاب درسی با ترتیب آموزشی آورده شده است.
۲. در تمرینات پایانی با عنوان خط به خط کتاب درسی، کل تمرینات، فعالیت‌ها، کار در کلاس‌های کتاب درسی، تمام تمرینات تکمیلی کتاب راهنمای معلم و سؤالات امتحانات نهایی نظام جدید آمده است.
۳. در تمرینات تکمیلی، تمریناتی مشابه تمرینات کتاب درسی آمده است که شما را برای هر آزمونی آماده کند و تسلط شما را بر کتاب درسی تکمیل نماید.

پاسخ	درسنامه و سؤالات
۱۵۲	۶ تا ۸۰
۲۱۶	۸۱ تا ۱۱۱
۲۴۰	۱۱۲ تا ۱۵۰

فصل اول: دایره
فصل دوم: تبدیل‌های هندسی و کاربردها
فصل سوم: روابط طولی در مثلث

امتحان نهایی



۲۷۸	آزمون ۱: نوبت اول
۲۷۹	آزمون ۲: نوبت دوم
۲۸۰	آزمون ۳: خرداد ماه ۱۴۰۳
۲۸۲	آزمون ۴: خرداد ماه ۱۴۰۴
۲۸۴	پاسخ‌نامه تشریحی آزمون ۱ تا ۴

بارم‌بندی درس هندسه ۲

شماره فصل	نوبت اول	نوبت دوم
اول	۱۴	۶
دوم	۶	۲
	-	۵
سوم	-	۷
جمع	۲۰	۲۰

۱

بخش



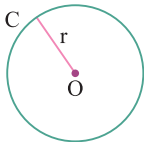
درستنامه

و سؤالات تشریحی

فصل اول

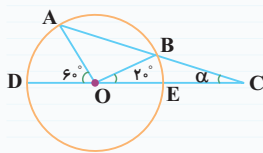
درس اول: مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره (قسمت اول)

هندسه یازدهم

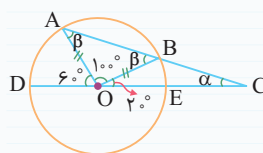


■ **دایره:** مجموعه نقاطی از صفحه است که از یک نقطه ثابت در آن صفحه به فاصله مشخصی هستند. نقطه ثابت را مرکز دایره و فاصله مشخص را شعاع دایره می‌گویند. دایره C به مرکز O و شعاع r را با $C(O, r)$ نشان می‌دهند. (مثلاً وقتی می‌گویند $C(O, ۳)$ یعنی یک دایره داریم که مرکز اون نقطه O هستش و شعاعش برابر ۳ هست.)

■ **نکته:** اگر در دایره مثلی دیده شود که دو ضلع از آن، دو شعاع دایره باشد، حتماً آن مثلث، متساوی الساقین است و برابر قرار دادن زاویه‌های نظیر دو ساق، کلید حل مسئله است. البته گاهی اوقات لازم است خودمان شعاع مناسبی را رسم کنیم تا مثلی ایجاد شود و بتوانیم به خواسته مسئله برسیم.



؟ در شکل مقابل، نقطه O مرکز دایره است. اندازه زاویه α را به دست آورید.



$$60^\circ + \widehat{AOB} + 20^\circ = 180^\circ \Rightarrow \widehat{AOB} = 100^\circ$$

✓ زاویه $\widehat{AOB}$ برابر است با:

$$100^\circ + \beta + \beta = 180^\circ \Rightarrow 2\beta = 80^\circ \Rightarrow \beta = 40^\circ$$

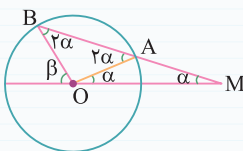
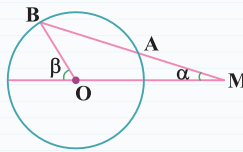
مثلث AOB متساوی الساقین است، پس:

$$\beta = 20^\circ + \alpha \Rightarrow 40^\circ = 20^\circ + \alpha \Rightarrow \alpha = 20^\circ$$

زاویه β زاویه خارجی مثلث OBC است، پس:

(تمرین ۶ صفحه ۱۷ کتاب درسی)

؟ در شکل زیر، دایره $C(O, R)$ مفروض است. اگر $MA = R$ باشد، نشان دهید $\beta = 3\alpha$.



✓ از O به A وصل می‌کنیم. چون $OA = R = MA$ است، پس مثلث OAM متساوی الساقین بوده و زاویه

$\widehat{AOM}$ نیز برابر α است. از طرفی مثلث AOB نیز متساوی الساقین است زیرا $OA = OB = R$ می‌باشد. زاویه

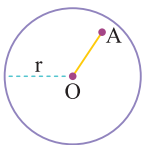
$$\widehat{OAB} = \alpha + \alpha = 2\alpha \Rightarrow \widehat{OAB} = \widehat{OBA} = 2\alpha$$

$\widehat{OAB}$ زاویه خارجی مثلث OAM است، پس:

$$\beta = 2\alpha + \alpha \Rightarrow \beta = 3\alpha$$

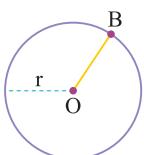
β زاویه خارجی مثلث BOM است، پس:

■ **وضعیت نقطه و دایره:** یک نقطه می‌تواند سه وضعیت نسبت به دایره داشته باشد:



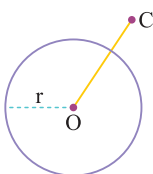
A درون دایره است. $OA < r$

□ اگر نقطه‌ای درون دایره باشد، فاصله آن تا مرکز دایره کم‌تر از شعاع دایره است.



B روی دایره است. $OB = r$

□ اگر نقطه‌ای روی دایره باشد، فاصله آن تا مرکز دایره برابر با شعاع دایره است.



$OC > r \Leftrightarrow$ C بیرون دایره است.

پ اگر نقطه‌ای بیرون دایره باشد، فاصله آن تا مرکز دایره، بیش‌تر از شعاع دایره است.

؟ جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

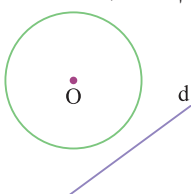
آ اگر نقطه‌ای بیرون دایره باشد، فاصله آن تا مرکز دایره از است.

ب اگر فاصله نقطه A تا مرکز دایره $C(O, r)$ برابر ۳ باشد، آن‌گاه نقطه A دایره است.

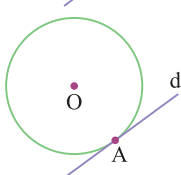
✓ آ بیشتر - شعاع دایره

ب درون

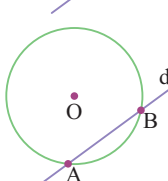
■ **اوضاع نسبی خط و دایره:** یک خط و یک دایره با توجه به تعداد نقاط مشترکی که دارند می‌توانند سه وضعیت مختلف نسبت به هم داشته باشند:



آ خط و دایره هیچ نقطه مشترکی ندارند.



ب خط و دایره تنها یک نقطه مشترک دارند. در این حالت می‌گوییم خط بر دایره مماس است.

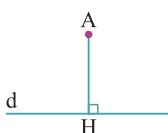


ب خط و دایره دو نقطه مشترک دارند و می‌گوییم خط و دایره متقاطع هستند. توجه کنید که در این حالت خط را نسبت به دایره قاطع می‌نامیم.

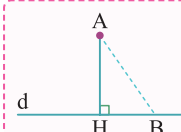
؟ جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

اگر فاصله مرکز دایره تا خطی کم‌تر از شعاع دایره باشد، آن‌گاه خط و دایره مشترک دارند.

✓ دو نقطه



■ **فاصله نقطه از خط:** خط d و نقطه A خارج از آن را در نظر بگیرید. از نقطه A بر خط d عمود می‌کنیم و پای عمود را H می‌نامیم. فاصله نقطه A از خط d، برابر با طول پاره خط AH است.



$AB > AH$

نکته اگر از نقطه A بر خط d عمود کنیم و پای عمود را H بنامیم، آن‌گاه فاصله هر نقطه دیگری از خط d مانند B از

نقطه A بیش‌تر از فاصله نقطه H از نقطه A است.

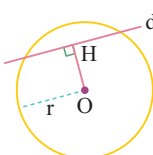
نتیجه اگر فاصله نقطه H روی خط d از نقطه A، کوچک‌تر از فاصله سایر نقاط خط d از نقطه A باشد، می‌توان نتیجه گرفت که AH بر خط d عمود است.

مثال که داستان فاصله نقطه از خط رو فهمیدیم بریم اوضاع نسبی خط و دایره رو براساس فاصله نقطه از خط بررسی کنیم.

■ **اوضاع نسبی خط و دایره از دیدگاه فاصله نقطه از خط:** خط d و دایره $C(O, r)$ مفروض‌اند. اگر نقطه H پای عمودی باشد که از نقطه O بر خط d

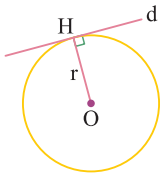
رسم می‌شود، آن‌گاه داریم:

آ اگر فاصله مرکز دایره تا خط d از شعاع دایره کم‌تر باشد، خط و دایره دو نقطه مشترک دارند، یعنی متقاطع‌اند.



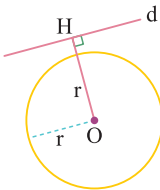
خط و دایره متقاطع‌اند. $OH < r \Leftrightarrow$

ب) اگر فاصله مرکز دایره تا خط d برابر با شعاع دایره باشد، خط و دایره یک نقطه مشترک دارند، یعنی خط بر دایره مماس است.



خط بر دایره مماس است. $\Leftrightarrow OH = r$

ب) اگر فاصله مرکز دایره تا خط d بیش تر از شعاع دایره باشد، خط و دایره هیچ نقطه مشترکی ندارند.



خط و دایره هیچ نقطه مشترکی ندارند. $\Leftrightarrow OH > r$

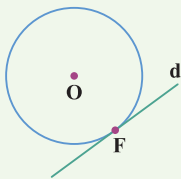
؟ جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

اگر خط و دایره یک نقطه مشترک داشته باشند، آن گاه فاصله مرکز دایره تا خط است.

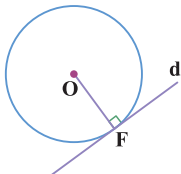
برابر شعاع دایره

● فرض کنید خط d بر دایره C در نقطه F مماس است. ثابت کنید شعاع OF و خط مماس بر دایره در نقطه F برهم عمودند. (فعالیت ۱ صفحه ۱ کتاب درسی)

اثبات



هر نقطه دیگری غیر از F روی خط d مانند B خارج از دایره قرار دارد. بنابراین فاصله آن تا مرکز دایره بیش تر از شعاع دایره خواهد بود، یعنی $OB > r$. از طرف دیگر نقطه F روی دایره قرار دارد، بنابراین فاصله اش تا مرکز دایره برابر با شعاع دایره است، یعنی $OF = r$. بنابراین می توان گفت که نقطه F نزدیک ترین نقطه خط d به نقطه O می باشد. حال اگر بخواهیم از O بر خط d عمود کنیم، از آن جایی که فاصله O تا پای عمود، کوتاه ترین فاصله نقاط خط d تا O خواهد بود، بنابراین پای عمود همان نقطه F می باشد. پس شعاع OF در نقطه F بر خط d عمود خواهد بود.



● خط d در نقطه F بر شعاع OF عمود است. ثابت کنید این خط با دایره فقط یک نقطه تماس دارد و بنابراین بر دایره مماس است. (فعالیت ۲ صفحه ۱ کتاب درسی)

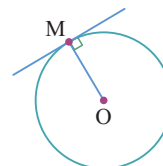
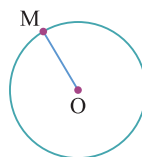
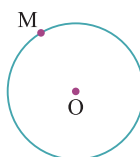
اثبات

اگر هر نقطه دیگری غیر از F مانند B روی خط d در نظر بگیریم، فاصله شان تا نقطه O از مقدار شعاع دایره یعنی OF بیش تر است (زیرا OF بر خط d عمود است).؛ بنابراین همه این نقاط خارج از دایره قرار دارند و خط و دایره تنها در نقطه F با هم مشترک هستند. پس می توان گفت که خط d بر دایره مماس است.

با توجه به دو مطلب قبلی همیشه نتیجه پایینی گرفت:

نتیجه خط و دایره برهم مماس اند اگر و تنها اگر این خط در نقطه تماس با دایره، بر شعاع گذرنده از نقطه تماس عمود باشد.

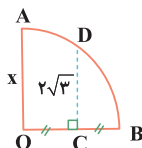
رسم مماس بر دایره $C(O, r)$ از نقطه M روی آن: می دانیم که خط مماس بر دایره $C(O, r)$ در نقطه M ، بر شعاع OM عمود خواهد بود. بنابراین ابتدا شعاع OM را رسم می کنیم و سپس در نقطه M بر OM عمود می کنیم تا خط مماس بر دایره در نقطه M رسم شود. (رسم فط عمود بر OM در نقطه M رو به کمک فک کش و پرگار در هندسه (۱) دیده ایم. توجه کن نوشتن مراحل رسم در اینجا نیازی نیست.)



خط‌به‌خط کتاب درسی

● جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

۱. مجموعه نقاطی از صفحه که از یک نقطه ثابت در آن صفحه به فاصله مشخص هستند را می‌نامند. نقطه ثابت را و فاصله مشخص را می‌گویند.
۲. در ربع دایره شکل مقابل مقدار x برابر است.



۳. اگر نقطه‌ای دایره باشد، فاصله آن تا مرکز دایره کم‌تر از دایره است.
۴. اگر نقطه‌ای بیرون دایره باشد، فاصله آن تا دایره از شعاع دایره است.
۵. دایره $C(O, 3)$ و نقطه A مفروض‌اند. اگر $OA = 5$ باشد، آن‌گاه نقطه A دایره است.
۶. خط و دایره تنها یک نقطه مشترک دارند. در این حالت می‌گوییم خط و دایره
۷. اگر خطی بر دایره‌ای مماس باشد، آن‌گاه خط و دایره نقطه مشترک دارند.
۸. در حالتی که خط و دایره دو نقطه مشترک دارند، خط را نسبت به دایره می‌نامیم.
۹. نزدیک‌ترین نقطه خط d از مرکز دایره $C(O, r)$ ، درون دایره است. در این صورت خط و دایره نقطه مشترک دارند.
۱۰. اگر فاصله مرکز دایره تا خط d برابر باشد، خط بر دایره مماس است.
۱۱. فاصله مرکز دایره از یک خط، کمتر از شعاع آن دایره است. این خط و دایره نقطه اشتراک دارند.
۱۲. اگر فاصله نقطه B روی خط d از نقطه A ، کوچک‌تر از فاصله سایر نقاط خط d از نقطه A باشد، می‌توان نتیجه گرفت که است.
۱۳. خط d در نقطه T بر دایره $C(O, r)$ مماس است. در این صورت شعاع OT و خط مماس در نقطه T

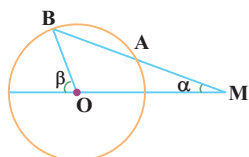
(خرداد ۱۴۰۴)

● درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

۱۴. اندازه شعاع دایره مقداری نامنفی است.
۱۵. فاصله هر نقطه روی دایره تا مرکز آن، برابر شعاع دایره است.
۱۶. خط d در نقطه A بر دایره $C(O, R)$ مماس است. نقطه‌ای مانند B روی خط d وجود دارد که $OB \leq OA$ باشد.
۱۷. اگر خطی با دایره یک نقطه مشترک داشته باشد، خط را نسبت به دایره قاطع می‌گوییم.
۱۸. اگر خط d بر دایره C در نقطه A مماس باشد، آن‌گاه OA و d برهم عمودند.
۱۹. اگر خط d بر شعاع OA عمود باشد، آن‌گاه خط بر دایره $C(O, r)$ مماس است.
۲۰. اگر خط d در نقطه B بر شعاع OB عمود باشد، تعداد نقاط مشترک خط و دایره، هیچ، یک یا دو خواهد بود.
۲۱. اگر فاصله نزدیک‌ترین نقطه از خط d تا مرکز دایره $C(O, r)$ از r بزرگ‌تر باشد، خط و دایره هیچ نقطه مشترکی ندارند.

● مسائل

۲۲. در شکل مقابل، دایره $C(O, R)$ مفروض است. اگر $MA = R$ باشد، نشان دهید $\beta = 3\alpha$.



(تمرین ۶ صفحه ۱۷ کتاب درسی)

۲۳. وضعیت یک نقطه و دایره را با رسم شکل بررسی کنید.
۲۴. وضعیت یک خط و یک دایره را از نظر تعداد نقاط مشترک با رسم شکل بررسی کنید.
۲۵. نقطه A خارج از خط d قرار دارد. روش به‌دست آوردن فاصله نقطه A از خط d را توضیح دهید.
۲۶. برای به‌دست آوردن فاصله نقطه A از خط d ، فاصله نقطه A را از نقطه H روی خط d محاسبه می‌کنیم. توضیح دهید که نقطه H چگونه تعیین می‌شود؟
۲۷. وضعیت یک خط و یک دایره را از نظر فاصله مرکز دایره تا خط با رسم شکل بررسی کنید.
۲۸. خط d در نقطه F بر شعاع OF عمود است. ثابت کنید این خط بر دایره مماس است.

(فعالیت ۲ صفحه ۱۱ کتاب درسی)

(فعالیت | صفحه ۱۱ کتاب درسی)

۲۹. خط d بر دایره C در نقطه F مماس است. ثابت کنید شعاع OF و خط مماس در نقطه F برهم عمودند.

۳۰. نقطه M روی دایره $C(O, r)$ قرار دارد. چگونه می توان خط مماس بر دایره در نقطه M را رسم کرد؟

تمرینات تکمیلی

● درستی یا نادرستی گزاره های زیر را مشخص کنید.

۳۱. فاصله دورترین نقطه دایره $C(O, 3)$ از نقطه A برابر ۵ است. در این صورت نقطه A بیرون دایره C قرار دارد.

۳۲. اگر نسبت فاصله دورترین نقاط دایره تا نقطه A به نزدیک ترین نقاط دایره تا نقطه A برابر ۹ باشد، نقطه A حتماً درون دایره است.

۳۳. اگر فاصله دورترین و نزدیک ترین نقاط دایره از نقطه A به ترتیب ۱۲ و ۲ باشد، نقطه A حتماً درون دایره است.

● جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

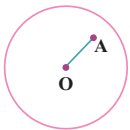
۳۴. نقطه $A(-3, 2)$ دایره $C((1, -1), 2)$ قرار دارد.

۳۵. نقطه A و دایره $C(O, 3)$ مفروض اند. اگر $OA = 5$ باشد، اختلاف بیش ترین و کم ترین فاصله نقطه A تا نقاط دایره برابر است.

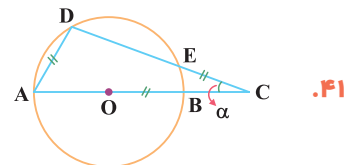
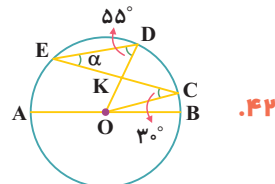
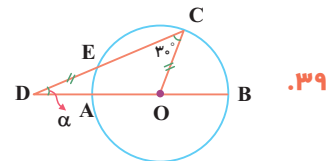
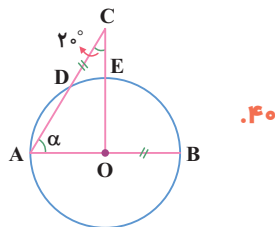
۳۶. مجموعه نقاطی که بیرون دایره $C(O, 1)$ و درون $C'(O, 3)$ قرار دارند، در ناحیه ای به مساحت قرار دارند.

۳۷. اگر فاصله دورترین و نزدیک ترین نقاط دایره $C(O, r)$ تا نقطه A به ترتیب ۷ و ۴ و $OA < r$ باشد، فاصله نقطه A از مرکز دایره برابر است.

۳۸. در شکل مقابل O مرکز دایره و $OA = 6$ است. اگر فاصله دورترین نقطه دایره تا A برابر ۱۵ باشد، اندازه شعاع دایره برابر است.



● در شکل های زیر، نقطه O مرکز دایره است. اندازه زاویه α را بر حسب درجه به دست آورید.



۴۳. فاصله نقطه A از مرکز دایره $C(O, 4)$ برابر $2x - 5$ است. اگر نقطه A درون دایره باشد، محدوده x را به دست آورید.

۴۴. فاصله نقطه A از مرکز دایره $C(O, 4)$ برابر $x - 6$ است. اگر نقطه A بیرون دایره C نباشد، مجموع مقادیر صحیح x را به دست آورید.

۴۵. نقاط A و B روی دایره $C(O, 4)$ قرار دارند. اگر $OA = x^2 - 5x + 10$ و $OB = 3x^2 - 7x + 6$ باشند، مقدار x را به دست آورید.

۴۶. فاصله نقطه A از مرکز دایره $C(O, 3x - 3)$ برابر $x + 7$ است. حدود x را طوری تعیین کنید که:

(آ) نقطه A درون دایره باشد.

(ب) نقطه A بیرون دایره باشد.

۴۷. فاصله نقطه A از مرکز دایره $C(O, 4)$ برابر ۷ است. فاصله دورترین و نزدیک ترین نقاط دایره تا نقطه A را به دست آورید.

۴۸. بیش ترین فاصله نقطه A تا نقاط دایره $2/5$ برابر شعاع دایره است. اگر کم ترین فاصله نقطه A تا نقاط دایره برابر ۴ باشد، اندازه شعاع دایره را به دست آورید.

۴۹. کم ترین و بیش ترین فاصله نقاط دایره $C(O, r)$ از نقطه A به ترتیب ۳ و ۱۱ است. مقادیر ممکن برای شعاع دایره را به دست آورید.

۵۰. خط d به فاصله $x - 10$ از مرکز دایره $C(O, 3)$ قرار دارد و دایره C را در دو نقطه قطع می کند. مجموع مقادیر طبیعی x را به دست آورید.

۵۱. فاصله مرکز دایره $C(O, 3a + 2)$ تا خطوط d_1 و d_2 به ترتیب برابر $OH_1 = a + 8$ و $OH_2 = 5 - a$ است. اگر d_1 بر دایره مماس باشد، وضعیت خط d_2 و دایره C را تعیین کنید.

۵۲. فاصله مرکز دایره $C(O, 6)$ از خط d برابر ۱۰ است. کم ترین و بیش ترین فاصله نقاط دایره تا خط d را به دست آورید.

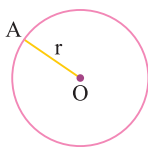
فصل اول

درس اول: مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره (قسمت دوم)

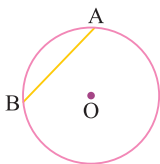
هندسه یازدهم

■ **چند تعریف در دایره:** ابتدا به بررسی چند تعریف در دایره می‌پردازیم که آن‌ها را در دوره اول دبیرستان دیده‌اید.

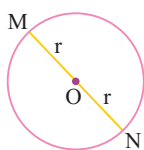
۱ **شعاع دایره:** به پاره خطی که یک سر آن مرکز دایره و سر دیگر آن نقطه‌ای روی دایره باشد، شعاع دایره می‌گویند. شعاع دایره را معمولاً با حرف r نمایش می‌دهند.



۲ **وتر دایره:** پاره خطی که دو سر آن روی دایره باشد را یک وتر از دایره می‌گویند.



۳ **قطر دایره:** وتری از دایره که از مرکز دایره عبور می‌کند را قطر دایره می‌گویند. قطر دایره، بزرگ‌ترین وتر دایره است و اندازه آن دو برابر اندازه شعاع دایره است.



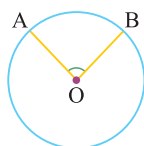
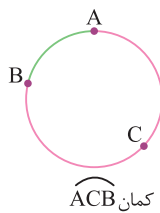
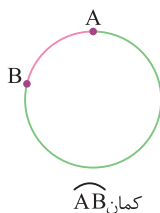
❓ در دایره‌ای با شعاع $3 - 2x$ ، طول بزرگ‌ترین وتر برابر ۱۴ می‌باشد. مقدار x را به دست آورید.

✔ می‌دانیم بزرگ‌ترین وتر دایره، قطر دایره است و قطر دایره دو برابر شعاع دایره می‌باشد. پس:

$$2(2x - 3) = 14 \Rightarrow 4x - 6 = 14 \Rightarrow 4x = 20 \Rightarrow x = 5$$

۴ **کمان دایره:** کمان دایره شامل دو نقطه روی دایره و تمام نقاط بین آن دو نقطه است. به عبارت دیگر، به قسمتی از محیط دایره که میان دو نقطه از آن محدود شده است، کمان می‌گویند.

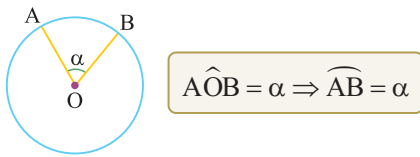
توجه اگر دو نقطه A و B روی دایره قرار داشته باشند، دو کمان روی دایره ایجاد می‌کنند که معمولاً کمان کوچک‌تر را با $\widehat{AB}$ و کمان بزرگ‌تر را با نقطه‌ای کمکی مانند C به صورت $\widehat{ACB}$ نمایش می‌دهند.



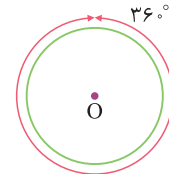
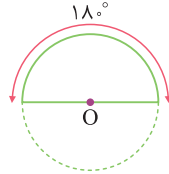
۵ **زاویه مرکزی:** زاویه‌ای است که رأس آن بر مرکز دایره منطبق باشد و دو ضلع آن دو شعاع از دایره است. مثلاً در شکل مقابل $\widehat{AOB}$ یک زاویه مرکزی است.

توجه زاویه $\widehat{AOB}$ زاویه مرکزی روبه‌رو به کمان $\widehat{AB}$ نامیده می‌شود. هم‌چنین کمان $\widehat{AB}$ نیز کمان روبه‌رو به زاویه مرکزی $\widehat{AOB}$ است.

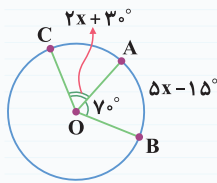
۶ اندازه کمان: اندازه کمان AB با اندازه زاویه مرکزی روبه روی آن بر حسب درجه برابر است. (واضح که اگر اندازه کمان AB برابر α درجه باشد، هتماً زاویه مرکزی روبه روی آن به اونم α درجه هستش.)



۱ نتیجه یک دایره، کمانی با اندازه 360° است.



۲ در شکل زیر، مرکز دایره است. اندازه کمان AC چند درجه است؟



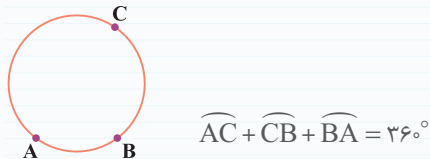
زاویه AOB مرکزی است، پس اندازه آن با کمان مقابلش برابر است:

$$AOB = AB \Rightarrow 70^\circ = 5x - 15^\circ \Rightarrow 5x = 70^\circ + 15^\circ = 85^\circ \Rightarrow x = \frac{85^\circ}{5} = 17^\circ$$

$$AOC = AC \Rightarrow 2x + 30^\circ = AC \xrightarrow{x=17^\circ} AC = 2(17^\circ) + 30^\circ = 64^\circ$$

از طرفی زاویه AOC نیز زاویه مرکزی است، پس:

۳ در شکل مقابل $ABC = 190^\circ$ و $BCA = 200^\circ$ هستند. اندازه کمان BC را به دست آورید.

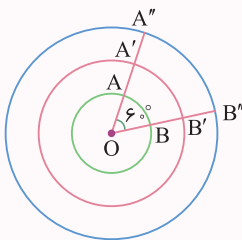


می دانیم یک دایره کمانی با اندازه 360° است، پس:

از طرفی داریم:

$$\begin{cases} ABC = 190^\circ \Rightarrow AB + BC = 190^\circ \\ BCA = 200^\circ \Rightarrow BC + AC = 200^\circ \end{cases} \Rightarrow AB + BC + BC + AC = 390^\circ \xrightarrow{AB+BC+AC=360^\circ} 360^\circ + BC = 390^\circ \Rightarrow BC = 30^\circ$$

نکته هر کمان علاوه بر اندازه، دارای طول نیز هست. کمان های دایره با شعاع های مختلف می توانند اندازه های برابری داشته باشند ولی طول آن ها برابر نباشد و یا می توانند طول های برابر داشته باشند ولی اندازه آن ها برابر نباشد. (اندازه کمان بر حسب درجه و طول آن بر حسب واحد طول مثلاً متر، سانتی متر و ... می باشد). مثلاً در شکل زیر، اندازه کمان های AB، A'B' و A''B'' با هم برابر و مساوی 60° است اما واضح است که طول های آن ها برابر نیست.

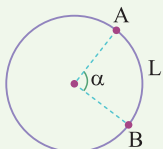


$$L = \frac{\pi R \alpha}{180^\circ}$$

۷ طول کمان: طول کمان AB از دایره $C(O, R)$ که روبه روی زاویه مرکزی با اندازه α است، به صورت مقابل به دست می آید.

اثبات

می‌دانیم دایره کمانی با اندازه 36° درجه و طول $2\pi R$ است، پس به کمک تناسب زیر داریم:



طول اندازه

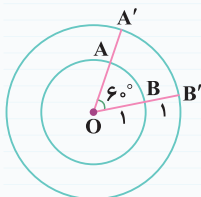
360° $2\pi R$
 α L

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} L \times 360^\circ = \alpha \times 2\pi R \Rightarrow L = \frac{\alpha \times 2\pi R}{360^\circ} \Rightarrow \boxed{L = \frac{\pi R \alpha}{180^\circ}}$$

توجه کن که نحوه به دست آوردن طول کمان AB ، در کار در کلاس ۳ صفحه ۱۲ کتاب درسی پرسیده شده.

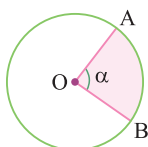
(کار در کلاس ۲ صفحه ۱۲ کتاب درسی)

❓ در شکل زیر، O مرکز دایره‌ها می‌باشد. اندازه و طول کمان‌های AB و $A'B'$ را به دست آورید.



✔ اندازه کمان‌های AB و $A'B'$ برابر زاویه مرکزی مقابل آن‌ها است، پس اندازه آن‌ها برابر 60° می‌باشد. اما طول کمان‌های AB و $A'B'$ برابر هستند با:

$$L = \frac{\pi R \alpha}{180^\circ} \Rightarrow \begin{cases} L_{AB} = \frac{\pi \times 1 \times 60^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi}{3} \\ L_{A'B'} = \frac{\pi \times 2 \times 60^\circ}{180^\circ} = \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$



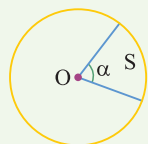
۸ **قطاع دایره:** ناحیه‌ای از درون و روی دایره را، که به دو شعاع دایره و آن دایره محدود است، یک قطاع دایره می‌نامند.

■ **مساحت قطاع:** اگر زاویه مرکزی قطاعی از دایره $C(O, R)$ بر حسب درجه α باشد، مساحت قطاع به صورت زیر به دست می‌آید:

$$S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360^\circ}$$

اثبات

می‌دانیم دایره قطاعی با زاویه مرکزی 36° و مساحت πR^2 است، پس:

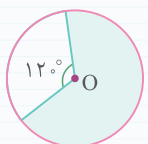


مساحت زاویه مرکزی

360° πR^2
 α S

$$\Rightarrow \pi R^2 \times \alpha = 360^\circ \times S \Rightarrow \boxed{S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360^\circ}}$$

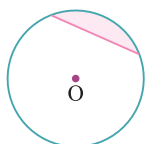
❓ در شکل مقابل، O مرکز دایره با شعاع ۵ است. مساحت ناحیه رنگی را به دست آورید.



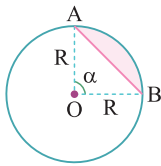
✔ زاویه مرکزی قطاع رنگی برابر $240^\circ = 360^\circ - 120^\circ$ است، پس:

$$S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360^\circ} \Rightarrow S = \frac{\pi (5^2) \times 240^\circ}{360^\circ} = \frac{5\pi}{3}$$

می‌توانستیم مساحت ناحیه غیر رنگی رو به دست بیاوریم و از مساحت دایره کم کنیم.

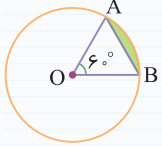


۹ **قطعه دایره:** در یک دایره، ناحیه محصور به یک وتر و کمان متناظرش را قطعه می‌گوییم.



■ **مساحت قطعه:** برای به دست آوردن مساحت قطعه، باید مساحت مثلث متساوی الساقین OAB را از مساحت قطاع کم کنیم.

$$S_{\text{قطعه}} = S_{\text{قطاع}} - S_{\Delta OAB} \Rightarrow S_{\text{قطعه}} = \frac{\pi R^2 \alpha}{360^\circ} - \frac{1}{2} R^2 \sin \alpha$$



؟ در شکل مقابل، O مرکز دایره به شعاع ۴ است. مساحت ناحیه رنگی را به دست آورید. (تمرین ۸ صفحه ۲۳ کتاب درسی)

$$S_{\text{قطعه}} = S_{\text{قطاع}} - S_{\Delta OAB} \Rightarrow S_{\text{قطعه}} = \frac{\pi (4)^2 \times 60^\circ}{360^\circ} - \frac{1}{2} \times 4^2 \times \sin 60^\circ = \frac{8\pi}{3} - \frac{1}{2} \times 4^2 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow S_{\text{قطعه}} = \frac{8\pi}{3} - 4\sqrt{3}$$

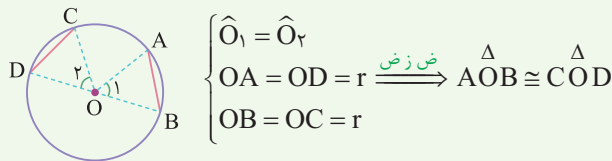
اثبات‌های کتاب درسی به کمک زاویه مرکزی:

(فعالیت ۱ صفحه ۱۳ کتاب درسی)

۱ اگر دو کمان AB و CD از دایره C(O, r) با هم برابر باشند، آن‌گاه وترهای AB و CD هم با یکدیگر برابرند.

اثبات

از مرکز دایره به دو سرتوهای AB و CD وصل می‌کنیم. چون $\widehat{AB} = \widehat{CD}$ است، پس زوایای مرکزی مقابل آن‌ها یعنی $\widehat{O}_1$ و $\widehat{O}_2$ برابرند، پس دو مثلث AOB و COD به حالت (ض ض ض) همنهشت هستند:



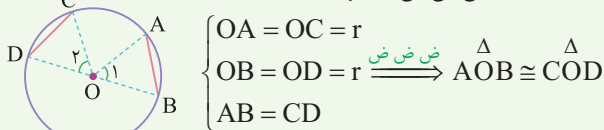
بنابراین اجزای متناظر دو مثلث با هم برابرند، پس $AB = CD$ می‌باشد.

(فعالیت ۲ صفحه ۱۳ کتاب درسی)

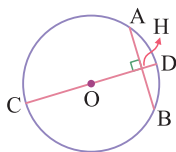
۲ اگر دو وتر AB و CD در یک دایره با هم برابر باشند، آن‌گاه کمان‌های نظیر این دو وتر نیز با هم برابرند.

اثبات

از مرکز دایره به دو سرتوهای AB و CD وصل می‌کنیم. دو مثلث AOB و COD به حالت (ض ض ض) همنهشت هستند:



بنابراین اجزای متناظر دو مثلث با هم برابرند، پس $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$ می‌باشد؛ چون O_1 و O_2 زوایای مرکزی رو به کمان‌های AB و CD هستند، پس $\widehat{AB} = \widehat{CD}$ می‌باشد.

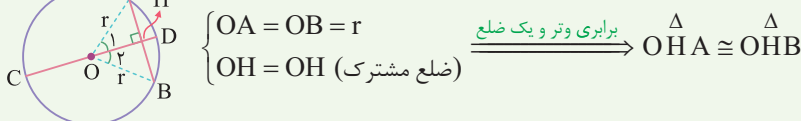


(فعالیت ۳ صفحه ۱۳ کتاب درسی)

۳ در هر دایره، قطر عمود بر هر وتر، آن وتر و کمان نظیرش را نصف می‌کند.

اثبات

از مرکز دایره به دو سرتوهای AB وصل می‌کنیم و داریم:



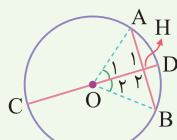
چون مثلث‌های OHA و OHB همنهشت هستند، پس اجزای متناظر آن‌ها با هم برابرند، از جمله $AH = BH$ و $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$ می‌باشد. چون $AH = BH$ است، پس قطر CD وتر AB را نصف کرده است و چون زوایای مرکزی $\widehat{O}_1$ و $\widehat{O}_2$ برابرند، پس کمان نظیر آن‌ها یعنی $\widehat{AD}$ و $\widehat{BD}$ نیز برابر می‌باشند، پس قطر CD کمان AB را نیز نصف کرده است.

(فعالیت ۴ صفحه ۱۳ کتاب درسی)

۴ اگر قطری از دایره، وترى را نصف کند، آن گاه بر آن وتر عمود بوده و کمان نظیر آن را نیز نصف می کند.

اثبات

از مرکز دایره به دو سر وتر AB وصل می کنیم. چون CD وتر AB را نصف کرده است، پس $AH = BH$ می باشد و داریم:



$$\begin{cases} OA = OB = r \\ AH = BH \\ OH = OH \text{ (ضلع مشترک)} \end{cases} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \triangle AHO \cong \triangle BHO$$

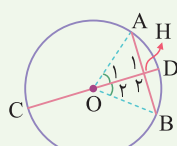
چون مثلث های AHO و BHO همنهشت هستند، بنابراین اجزای متناظر آن ها با هم برابرند، از جمله $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ و $\hat{H}_1 = \hat{H}_2$ می باشد. چون زوایای مرکزی O_1 و O_2 برابرند، پس کمان مقابل آن ها یعنی $\widehat{AD}$ و $\widehat{BD}$ برابرند؛ بنابراین کمان CD نظیر وتر AB را نصف کرده است. از طرفی چون $\hat{H}_1 + \hat{H}_2 = 180^\circ$ و $\hat{H}_1 = \hat{H}_2$ پس $\hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ$ می باشد، بنابراین قطر CD بر وتر AB عمود است.

(فعالیت ۵ صفحه ۱۳ کتاب درسی)

۵ اگر قطری از دایره کمانى را نصف کند، آن گاه این قطر بر وتر نظیر آن کمان عمود است و آن را نصف می کند.

اثبات

وتر نظیر کمان AB را رسم می کنیم. چون قطر CD کمان AB را نصف کرده است، پس $\widehat{AD} = \widehat{BD}$ می باشد. حال از مرکز دایره به دو سر وتر AB وصل می کنیم. چون $\widehat{AD} = \widehat{BD}$ می باشد، پس زوایای مرکزی مقابل کمان های AD و BD یعنی $\hat{O}_1$ و $\hat{O}_2$ با هم برابرند، پس:

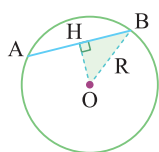


$$\begin{cases} OA = OB = r \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \\ OH = OH \text{ (ضلع مشترک)} \end{cases} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \triangle AHO \cong \triangle BHO$$

چون دو مثلث AHO و BHO همنهشت هستند، بنابراین اجزای متناظر آن ها با هم برابرند، یعنی $AH = BH$ و $\hat{H}_1 = \hat{H}_2$ می باشد. چون $AH = BH$ است، پس قطر CD بر وتر نظیر کمان AB یعنی وتر AB عمود است. از آن جایی که $\hat{H}_1 + \hat{H}_2 = 180^\circ$ و $\hat{H}_1 = \hat{H}_2$ می باشند، پس $\hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ$ بوده و این یعنی قطر CD بر وتر نظیر کمان AB یعنی وتر AB عمود است.

نتیجه با توجه به اثبات های فوق، اگر نقاط وسط وتر AB و کمان AB را داشته باشیم، خط گذرنده از وسط کمان و وسط وتر، قطر دایره است که بر وتر AB عمود است.

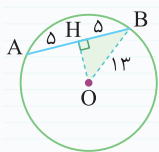
(فعالیت ۶ صفحه ۱۳ کتاب درسی)



فاصله مرکز دایره تا وتر AB: می دانیم فاصله نقطه O از وتر AB برابر طول عمود OH است. چون OH بر وتر AB عمود است، پس H وسط وتر AB می باشد. حال اگر از O به B وصل کنیم، به کمک مثلث قائم الزاویه رنگی می توانیم طول OH یعنی فاصله مرکز دایره تا وتر AB را به دست آوریم. به مثال های زیر توجه کنید.

؟ در دایره $C(O, 13)$ ، طول وتر AB برابر ۱۰ می باشد. فاصله مرکز دایره تا وتر AB را به دست آورید.

✓ از مرکز دایره بر وتر AB عمود می کنیم. می دانیم OH وتر AB را نصف می کند. پس $AH = HB = \frac{10}{2} = 5$ می باشد. حال از O به B وصل می کنیم. در مثلث قائم الزاویه OHB به کمک قضیه فیثاغورس داریم:



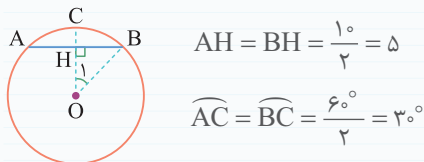
$$OB^2 = OH^2 + HB^2 \Rightarrow 13^2 = OH^2 + 5^2 \Rightarrow OH^2 = 169 - 25 = 144 \Rightarrow OH = 12$$

ممکنه به پای شعاع دایره یا طول وتر، اندازه کمان متناظر با وتر رو بدن. سوال بعدیو ببین.

(تمرین ۷ صفحه ۱۷ کتاب درسی)

❓ در دایره $C(O, R)$ ، $\widehat{AB} = 60^\circ$ و $AB = 10$. فاصله O از وتر AB را به دست آورید.

🔗 از O بر وتر AB عمود کرده و امتداد می دهیم تا کمان AB را در نقطه C قطع کند. می دانیم OC وتر AB و کمان AB را نصف می کند، پس:

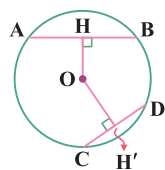


$$AH = BH = \frac{10}{2} = 5$$

$$\widehat{AC} = \widehat{BC} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$$

از O به B وصل می کنیم. زاویه O_1 زاویه مرکزی رو به کمان BC است، پس $\widehat{O_1} = \widehat{BC} = 30^\circ$ می باشد. حال در مثلث قائم الزاویه OHB داریم:

$$\tan \widehat{O_1} = \frac{BH}{OH} \Rightarrow \tan 30^\circ = \frac{5}{OH} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{5}{OH} \Rightarrow OH = \frac{3 \times 5}{\sqrt{3}} = 5\sqrt{3}$$



(تمرین ۸ صفحه ۱۷ کتاب درسی)

■ **وترهای نامساوی:** دایره $C(O, R)$ در شکل مقابل مفروض است. $AB > CD$ اگر و تنها اگر $OH < OH'$.

قبل از فوندن اثبات، اینو بفون. میفوام در مورد «اگر و تنها اگر» صحبت کنم. عبارت «اگر و تنها اگر» یعنی این که قضیه یک قضیه دو شرطیه، یعنی برای اثبات یه بار باید با فرض « $AB > CD$ » ثابت کنیم که « $OH' > OH$ » هستش و بار دیگه باید با فرض « $OH' > OH$ » نشون بدیم که « $AB > CD$ » هستش.

اثبات

حالت اول فرض می کنیم $AB > CD$ باشد. از O به B و C وصل می کنیم. می دانیم H وسط AB و H' وسط CD می باشد، پس:

$$AB > CD \Rightarrow \frac{AB}{2} > \frac{CD}{2} \Rightarrow BH > CH'$$

حال به کمک قضیه فیثاغورس در مثلث های OHB و OCH' داریم:

$$\begin{aligned} OB^2 &= OH^2 + BH^2 \Rightarrow R^2 = OH^2 + BH^2 \Rightarrow BH^2 = R^2 - OH^2 \\ OC^2 &= OH'^2 + CH'^2 \Rightarrow R^2 = OH'^2 + CH'^2 \Rightarrow CH'^2 = R^2 - OH'^2 \end{aligned}$$

چون $BH > CH'$ است، پس $BH^2 > CH'^2$ می باشد و داریم:

$$R^2 - OH^2 > R^2 - OH'^2 \Rightarrow -OH^2 > -OH'^2 \Rightarrow OH^2 < OH'^2 \Rightarrow OH < OH'$$

حالت دوم فرض می کنیم $OH < OH'$ باشد. از O به B و C وصل می کنیم. به کمک قضیه فیثاغورس در مثلث های OHB و OCH' داریم:

$$\begin{aligned} OB^2 &= OH^2 + BH^2 \Rightarrow R^2 = OH^2 + BH^2 \Rightarrow OH^2 = R^2 - BH^2 \\ OC^2 &= OH'^2 + CH'^2 \Rightarrow R^2 = OH'^2 + CH'^2 \Rightarrow OH'^2 = R^2 - CH'^2 \end{aligned}$$

چون $OH < OH'$ است، پس $OH^2 < OH'^2$ می باشد و داریم:

$$R^2 - BH^2 < R^2 - CH'^2 \Rightarrow -BH^2 < -CH'^2 \Rightarrow BH^2 > CH'^2 \Rightarrow BH > CH'$$

می دانیم H وسط وتر AB و H' وسط وتر CD است، پس:

$$BH > CH' \xRightarrow{\times 2} 2BH > 2CH' \Rightarrow AB > CD$$

تو امتحانا یک حالت رو ازتون می پرسن.

خطبه خط کتاب درسی

● جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

- ۵۳. به پاره خطی که یک سر آن مرکز دایره و سر دیگر آن نقطه‌ای روی دایره باشد دایره می‌گویند.
- ۵۴. پاره خطی که دو سر آن روی دایره باشد را می‌گویند.
- ۵۵. بزرگ‌ترین وتر دایره را می‌گویند.
- ۵۶. وتری از دایره که از عبور می‌کند را قطر دایره می‌گویند.
- ۵۷. به قسمتی از محیط دایره که میان دو نقطه از آن محدود شده است می‌گویند.
- ۵۸. واحد اندازه‌گیری اندازه کمان می‌باشد.
- ۵۹. به زاویه‌ای که رأس آن بر مرکز دایره منطبق باشد و دو ضلع آن دو شعاع از دایره باشد می‌گویند.
- ۶۰. ناحیه‌ای از درون و روی دایره که به دو شعاع دایره و آن دایره محدود است دایره می‌گویند.
- ۶۱. در هر دایره، قطر عمود بر وتر، آن وتر را می‌کند.
- ۶۲. اگر نقاط وسط وتر AB و کمان AB را داشته باشیم، خط گذرنده از وسط وتر AB و وسط کمان AB، است.
- ۶۳. در دایره $C(O, 6)$ ، طول کمان روبه‌رو به زاویه محاطی 15° برابر است.
- ۶۴. در دایره $C(O, 4)$ ، شعاع‌های OA و OB برهم عمودند. طول کمان AB برابر است.
- ۶۵. مساحت قطاعی از دایره $C(O, 9)$ با زاویه مرکزی 120° برابر است.

● درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

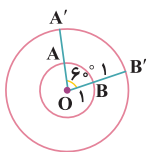
- ۶۶. اندازه قطر دایره دو برابر اندازه شعاع دایره است.
- ۶۷. پاره خط AB که از دو نقطه متمایز از دایره می‌گذرد را وتر دایره می‌گوییم.
- ۶۸. اندازه زاویه مرکزی نصف اندازه کمان روبه‌رو به آن است.
- ۶۹. در هر دایره، طول یک کمان، برابر با اندازه زاویه مرکزی مقابل به آن کمان است.
- ۷۰. نیم دایره کمانی با طول 180° است.
- ۷۱. طول کمان AB از دایره $C(O, R)$ که روبه‌رو به زاویه مرکزی با اندازه α می‌باشد برابر $L = \frac{\pi R \alpha}{360^\circ}$ است.
- ۷۲. کمان‌های دایره با شعاع‌های مختلف می‌توانند اندازه‌های برابری داشته باشند ولی طول آن‌ها برابر نباشد.
- ۷۳. در هر دایره قطر عمود بر هر وتر، کمان نظیر آن وتر را نصف می‌کند.
- ۷۴. خط شامل وسط یک وتر و وسط کمان نظیر با آن، قطر دایره است.
- ۷۵. مساحت قطاعی از دایره $C(O, R)$ با زاویه مرکزی α از رابطه $S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360^\circ}$ به دست می‌آید.
- ۷۶. در دایره‌ای به شعاع ۶، مساحت قطاعی با زاویه مرکزی 120° برابر 9π است.

● مفاهیم زیر را تعریف کنید.

- ۷۷. شعاع دایره
- ۷۸. وتر دایره
- ۷۹. قطر دایره
- ۸۰. کمان دایره
- ۸۱. زاویه مرکزی
- ۸۲. قطاع دایره
- ۸۳. قطعه دایره

● مسائل

- ۸۴. در شکل زیر، O مرکز دایره‌ها می‌باشد. اندازه و طول کمان‌های AB و $A'B'$ را به دست آورید. (کاردکلاس ۲ صفحه ۱۲ کتاب درسی)

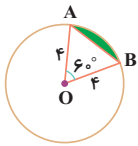


(تمرین ۷ صفحه ۱۷ کتاب درسی)

- ۸۵. در دایره $C(O, R)$ ، $\widehat{AB} = 60^\circ$ و $AB = 10$ ، فاصله O از وتر AB را به دست آورید.
- ۸۶. طول وتر AB در دایره $C(O, R)$ برابر ۱۰ است. اگر فاصله وتر AB تا مرکز دایره برابر $5\sqrt{3}$ باشد، طول کمان AB را به دست آورید.

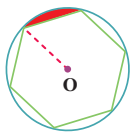
(تمرینات تکمیلی کتاب راهنمای معلم)

(تمرین ۸ صفحه ۲۳ کتاب درسی)



۸۷. در شکل زیر، O مرکز دایره به شعاع ۴ است. مساحت ناحیه رنگی را به دست آورید.

(تمرینات تکمیلی کتاب راهنمای معلم)



۸۸. در شکل زیر شعاع دایره ۴ و شش ضلعی، منتظم است. مساحت قسمت رنگی را به دست آورید.

۸۹. نشان دهید طول کمان AB از دایره C(O, R) که روبه روی زاویه مرکزی با اندازه α است از رابطه $L = \frac{\pi R \alpha}{180^\circ}$ به دست می آید. (کار در کلاس ۳ صفحه ۱۲ کتاب درسی)

۹۰. نشان دهید مساحت قطاع از دایره C(O, R) که روبه رو به زاویه مرکزی با اندازه α است از رابطه $S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360^\circ}$ به دست می آید.

(کار در کلاس ۳ صفحه ۱۲ کتاب درسی)

۹۱. ثابت کنید «اگر دو کمان $\widehat{AB}$ و $\widehat{CD}$ از دایره C(O, r) با هم برابر باشند، آن گاه وترهای AB و CD هم با یکدیگر برابرند.» (فعالیت ۱ صفحه ۱۳ کتاب درسی)

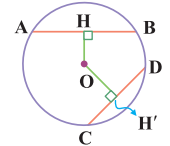
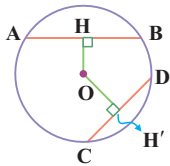
۹۲. ثابت کنید «اگر دو وتر AB و CD در یک دایره با هم برابر باشند، آن گاه کمان های نظیر این دو وتر نیز با هم برابرند.» (فعالیت ۲ صفحه ۱۳ کتاب درسی)

۹۳. ثابت کنید «در هر دایره، قطر عمود بر هر وتر، آن وتر و کمان نظیرش را نصف می کند.» (فعالیت ۳ صفحه ۱۳ کتاب درسی - خرداد ۱۴۰۳)

۹۴. ثابت کنید «اگر قطری از دایره، وتری را نصف کند آن گاه بر آن وتر عمود بوده و کمان نظیر آن را نیز نصف می کند.» (فعالیت ۴ صفحه ۱۳ کتاب درسی)

۹۵. ثابت کنید «اگر قطری از دایره کمانی را نصف کند، آن گاه این قطر بر وتر نظیر آن کمان عمود است و آن را نصف می کند.» (فعالیت ۵ صفحه ۱۳ کتاب درسی)

۹۶. دایره C(O, R) در شکل مقابل مفروض است. نشان دهید اگر $OH < OH'$ باشد آن گاه $AB > CD$ است.

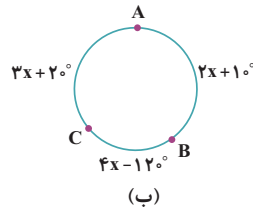
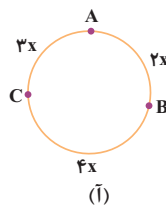


۹۷. دایره C(O, R) در شکل زیر مفروض است. نشان دهید اگر $AB > CD$ آن گاه $OH < OH'$ است.

(تمرینات تکمیلی کتاب راهنمای معلم)

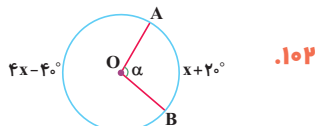
۹۸. در دایره با شعاع ۱۰، طول بزرگ ترین وتر $2x + 6$ است. مقدار x را به دست آورید.

۹۹. در دایره های زیر اندازه هر کمان در کنار آن نوشته شده است. مقدار x را به دست آورید.

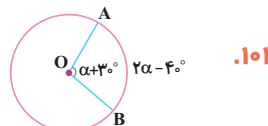


تمرینات تکمیلی

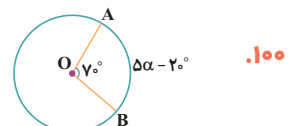
● در شکل های زیر، O مرکز دایره است. مقدار α را بر حسب درجه به دست آورید.



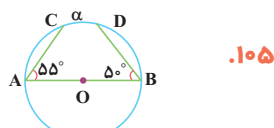
۱۰۲.



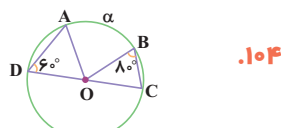
۱۰۱.



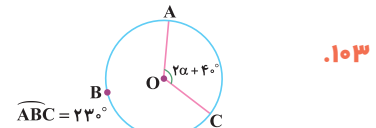
۱۰۰.



۱۰۵.



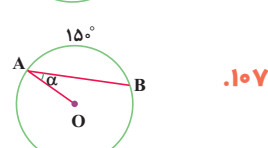
۱۰۴.



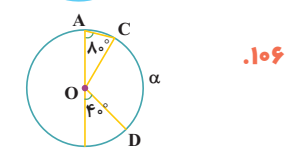
۱۰۳.



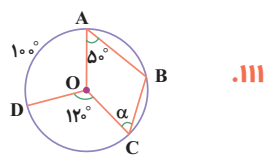
۱۰۸.



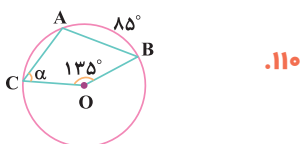
۱۰۷.



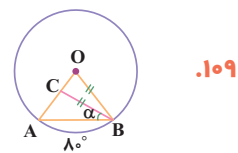
۱۰۶.



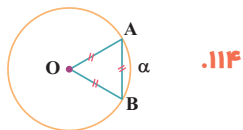
۱۱۱.



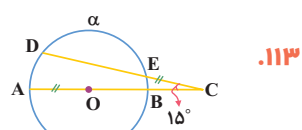
۱۱۰.



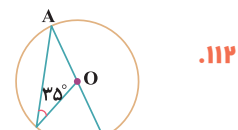
۱۰۹.



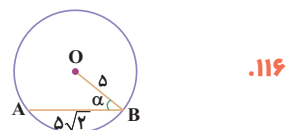
۱۱۴.



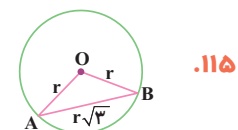
۱۱۳.



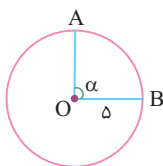
۱۱۲.



۱۱۶.

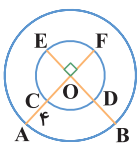


۱۱۵.

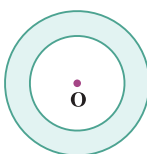


۱۱۷. در شکل مقابل O مرکز دایره است. اگر طول کمان $\widehat{AB}$ برابر 2π واحد باشد، زاویه α چند درجه است؟

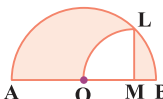
۱۱۸. طول کمان متناظر با زاویه مرکزی 108° در دایره‌ای برابر 6π است. طول شعاع دایره را به دست آورید.



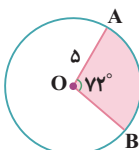
۱۱۹. در شکل زیر، O مرکز دایره‌ها و طول کمان $\widehat{CD}$ ، $\frac{3}{5}$ برابر طول کمان $\widehat{AB}$ است. اگر $AC = 4$ باشد، طول کمان $\widehat{EF}$ را به دست آورید.



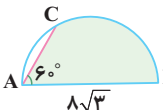
۱۲۰. در شکل زیر، O مرکز هر دو دایره است. اگر عدد محیط و مساحت ناحیه رنگی برابر 20π باشد، مساحت دایره بزرگ‌تر را به دست آورید.



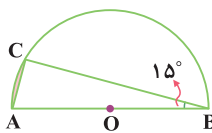
۱۲۱. در شکل زیر، O مرکز نیم دایره و M مرکز ربع دایره به شعاع ۶ است. مساحت ناحیه رنگی را به دست آورید.



۱۲۲. در شکل مقابل، O مرکز دایره است. مساحت ناحیه رنگی را به دست آورید.

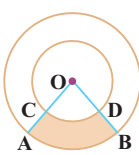


۱۲۳. در شکل زیر، نیم دایره به قطر $8\sqrt{3}$ است. مساحت ناحیه رنگی را به دست آورید.



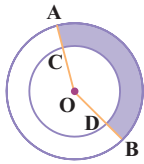
۱۲۴. در شکل زیر، O مرکز نیم دایره به شعاع ۶ است. مساحت ناحیه رنگی را به دست آورید.

۱۲۵. در دایره‌ای با شعاع ۶ مساحت قطاع با زاویه مرکزی 60° با مساحت قطاع در دایره‌ای با شعاع $3\sqrt{2}$ برابر است. زاویه مرکزی قطاع در دایره کوچک‌تر را به دست آورید.

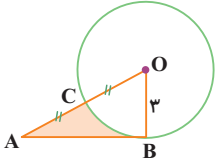


۱۲۶. در شکل مقابل، O مرکز دایره‌ها و $OC = 2AC$ است. اگر مساحت ناحیه رنگی ۱۵ باشد، مساحت قطاع COD را به دست آورید.

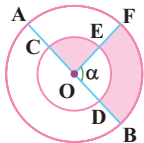
۱۳۷. در شکل زیر O مرکز دایره‌ها، $OA = 6$ و $OC = 4$ است. اگر طول کمان AB برابر 5π باشد، مساحت ناحیه رنگی را به دست آورید.



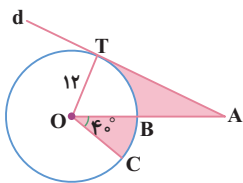
۱۳۸. در شکل زیر O مرکز دایره و AB بردایره مماس است. مساحت ناحیه رنگی را به دست آورید.



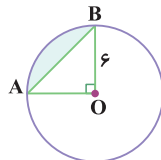
۱۳۹. در شکل مقابل، O مرکز دایره‌ها و شعاع دایره بزرگ‌تر دو برابر شعاع دایره کوچک‌تر است. اگر مساحت ناحیه‌های رنگی برابر باشد، اندازه زاویه α را به دست آورید.



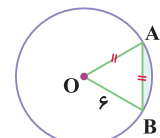
۱۳۰. در شکل زیر، O مرکز دایره و خط d بردایره مماس است. اگر AT برابر طول کمان TBC باشد، مجموع مساحت ناحیه‌های رنگی را به دست آورید.



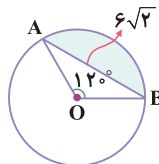
● در شکل‌های زیر O مرکز دایره است. مساحت ناحیه رنگی را به دست آورید.



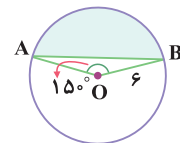
۱۳۲.



۱۳۱.

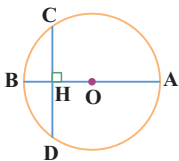


۱۳۵.

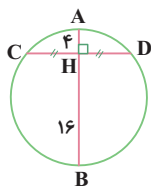


۱۳۴.

۱۳۶. در شکل مقابل $AB = 34$ و $CD = 32$ است. طول پاره خط BH را به دست آورید.



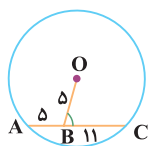
۱۳۷. در شکل زیر طول وتر CD را به دست آورید.



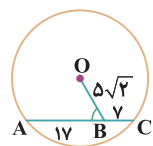
۱۳۸. فاصله مرکز دایره‌ای تا وترى به طول ۱۶ برابر ۶ است. طول وترى که به فاصله ۸ از مرکز دایره قرار دارد را به دست آورید.

۱۳۹. در دایره $(O, 4)$ ، فاصله مرکز دایره از وتر AB برابر نصف وتر AB است. طول کمان AB را به دست آورید.

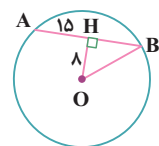
● در شکل‌های زیر O مرکز دایره است. طول شعاع دایره را به دست آورید.



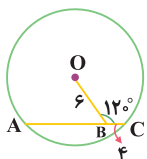
۱۴۲.



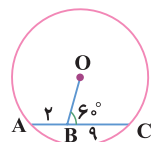
۱۴۱.



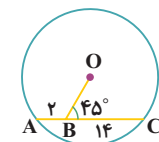
۱۴۰.



۱۴۵.

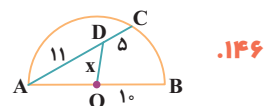
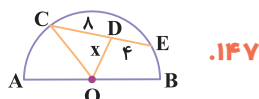


۱۴۴.

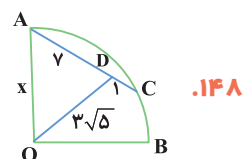
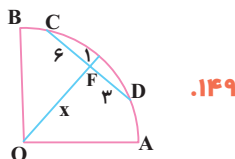


۱۴۳.

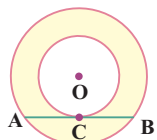
● در شکل های زیر، O مرکز نیم دایره است. مقدار x را به دست آورید.



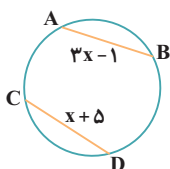
● در شکل های زیر، O مرکز ربع دایره است. مقدار x را به دست آورید.



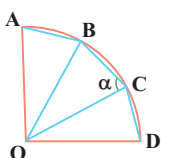
۱۵۰. در شکل مقابل، O مرکز دایره ها و وتر AB بر دایره کوچک ترمماس است. اگر $AB = 10^\circ$ باشد، مساحت ناحیه رنگی را به دست آورید.



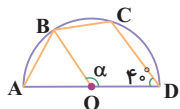
۱۵۱. در دو دایره هم مرکز طول وتری از دایره بزرگ تر که بر دایره کوچک ترمماس است، برابر ۱۸ است. مساحت ناحیه محدود بین دو دایره را به دست آورید.



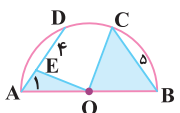
۱۵۲. در شکل زیر، اندازه کمان های AB و CD برابر است. مقدار x را به دست آورید.



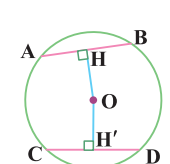
۱۵۳. در شکل زیر O مرکز ربع دایره و $AB = BC = CD$ است. مقدار α را به دست آورید.



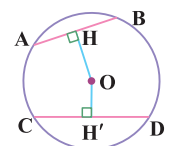
۱۵۴. در شکل زیر، O مرکز نیم دایره و وترهای AB و BC برابرند. مقدار α را به دست آورید.



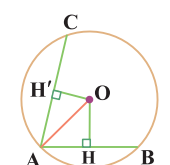
۱۵۵. در شکل زیر، O مرکز نیم دایره است. نسبت مساحت مثلث های رنگی را به دست آورید.



۱۵۶. در شکل زیر O مرکز دایره و $OH = OH'$ است. اگر $AB = 3x + 8$ و $CD = x + 12$ باشند، مقدار x را به دست آورید.



۱۵۷. در شکل زیر O مرکز دایره و $OH = 3OH'$ است. اگر $AB = 6$ و $CD = 10$ باشد، طول شعاع دایره را به دست آورید.



۱۵۸. در شکل زیر O مرکز دایره، $OA = 17$ ، $BH = 2x + 5$ و $CH' = 3x + 2$ است. اگر $OH' < OH$ باشد، حدود x را به دست آورید.

۲ بخش



پاسخنامه

فصل ۱
دایره

۱

دایره - مرکز دایره - شعاع دایره

۲

ابتدا شعاع OD را رسم می‌کنیم. می‌دانیم OA، OD، و OB شعاع دایره هستند، پس با هم برابرند. به کمک قضیه فیثاغورس در مثلث DCO داریم:

$$OD^2 = OC^2 + CD^2 \Rightarrow x^2 = \frac{x^2}{4} + (2\sqrt{3})^2$$

$$\Rightarrow \frac{3x^2}{4} = 12 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = 4$$

۳

درون - شعاع

۴

مرکز - بیش تر

۵

بیرون

۶

مماس است.

۷

یک

۸

قاطع

۹

دو

۱۰

شعاع دایره

۱۱

دو

۱۲

AB بر d عمود

۱۳

برهم عمودند.

۱۴

نادرست - اندازه شعاع دایره همواره مثبت است نه نامنفی. وقتی می‌گوییم نامنفی یعنی اندازه شعاع دایره می‌تواند صفر نیز باشد.

۱۵

درست

۱۶

نادرست - کمترین فاصله نقاط خط d از دایره برابر OA است. پس دو نقطه دیگری از خط d مانند B فاصله‌اش از مرکز دایره بیشتر از OA است.

۱۷

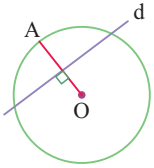
نادرست - در این حالت خط بر دایره مماس است.

۱۸

درست

۱۹

نادرست - در شکل مقابل خط d بر شعاع OA عمود است، در حالی که d بر دایره مماس نیست.



۲۰

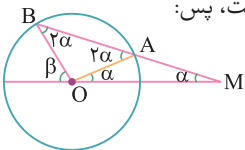
نادرست - چون خط d در نقطه B بر شعاع OB عمود است، پس خط d بر دایره مماس است و فقط یک نقطه مشترک دارند.

۲۱

درست - فاصله نزدیک‌ترین نقطه از خط d تا مرکز دایره همان فاصله مرکز از خط است و چون از شعاع دایره بزرگ‌تر است، پس خط و دایره هیچ نقطه مشترکی ندارند.

۲۲

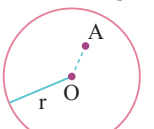
از O به A وصل می‌کنیم. چون $OA = R = MA$ است، پس مثلث OAM متساوی‌الساقین بوده و زاویه AOM نیز برابر α است. از طرفی مثلث AOB نیز متساوی‌الساقین است زیرا $OA = OB = R$ می‌باشد. زاویه $\widehat{OAB} = \alpha + \alpha = 2\alpha \Rightarrow \widehat{OAB} = \widehat{OBA} = 2\alpha$ پس:



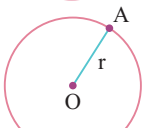
$\beta = 2\alpha + \alpha \Rightarrow \beta = 3\alpha$ پس: $\widehat{BOM}$ مثلث است.

۲۳

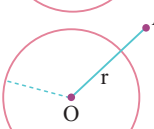
وضعیت نقطه A و دایره $C(O, r)$ به یکی از سه حالت زیر است:



۱- نقطه A درون دایره است. در این صورت فاصله نقطه A از مرکز دایره کمتر از شعاع دایره است.



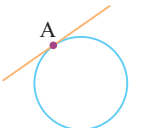
۲- نقطه A روی دایره است. در این صورت فاصله نقطه A از مرکز دایره برابر شعاع دایره است.



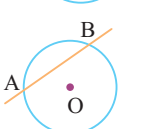
۳- نقطه A بیرون دایره است. در این صورت فاصله نقطه A از مرکز دایره بیشتر از شعاع دایره است.

۲۴

خط و دایره نقطه مشترکی ندارند.



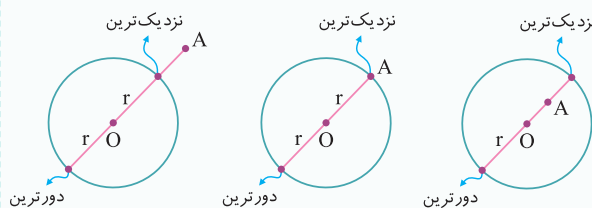
خط و دایره یک نقطه مشترک دارند که در این حالت می‌گوییم خط بر دایره مماس است.



خط و دایره دو نقطه مشترک دارند که در این حالت می‌گوییم خط و دایره متقاطع هستند.

دورترین و نزدیک‌ترین نقاط دایره تا یک نقطه

در شکل‌های زیر، دورترین و نزدیک‌ترین نقاط دایره تا نقطه A مشخص شده‌اند.



همان‌طور که ملاحظه می‌کنید بدون توجه به وضعیت نقطه A و دایره C(O, r) فاصله دورترین و نزدیک‌ترین نقاط دایره تا نقطه A به صورت زیر است:

۱. فاصله دورترین نقطه دایره تا نقطه A برابر است با:

$$\text{فاصله دورترین نقطه} = OA + r$$

۲. فاصله نزدیک‌ترین نقطه دایره تا نقطه A برابر است با:

$$\text{فاصله نزدیک‌ترین نقطه} = |OA - r|$$

پرا برای فاصله نزدیک‌ترین نقطه، قدرمطلق گذاشتیم؟ اگر A بیرون دایره باشد، فاصله همیشه $OA - r$ و اگر A درون دایره باشد، فاصله همیشه $r - OA$ به همین دلیل قدرمطلق گذاشتیم که هر دو حالت رو پوشش بده.

۳۱

نادرست - با توجه به این‌که فاصله دورترین نقطه دایره C(O, ۳) از نقطه A برابر ۵ است داریم: $OA + r = 5 \Rightarrow OA + 3 = 5 \Rightarrow OA = 2$ چون $OA < r$ است، پس A درون دایره می‌باشد.

۳۲

نادرست - با توجه به گزاره داریم:

$$\frac{OA + r}{|OA - r|} = 9 \Rightarrow OA + r = 9|OA - r|$$

حال دو حالت داریم:

$$1) OA < r \Rightarrow OA + r = 9(r - OA) \Rightarrow OA + r = 9r - 9OA \Rightarrow 10OA = 8r \Rightarrow OA = \frac{4}{5}r$$

$$2) OA > r \Rightarrow OA + r = 9(OA - r) \Rightarrow OA + r = 9OA - 9r \Rightarrow 8OA = 10r \Rightarrow OA = \frac{5}{4}r$$

چون r همواره مثبت است، پس در حالت اول A درون دایره و در حالت دوم A بیرون دایره است.

۳۳

نادرست - با توجه به گزاره $OA + r = 12$ و $|OA - r| = 2$ است. بنابراین دو حالت زیر را داریم:

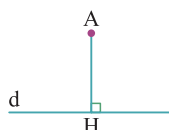
$$1) \begin{cases} OA + r = 12 \\ OA - r = 2 \end{cases} \Rightarrow 2OA = 14 \Rightarrow OA = 7$$

$\Rightarrow r = 5 \Rightarrow$ A بیرون دایره است.

$$2) \begin{cases} OA + r = 12 \\ r - OA = 2 \end{cases} \Rightarrow 2r = 14 \Rightarrow r = 7$$

$\Rightarrow OA = 5 \Rightarrow$ A درون دایره است.

۲۵

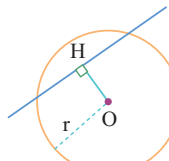


از نقطه A بر خط d عمود می‌کشیم و پای عمود را H می‌نامیم. فاصله نقطه A از خط d، برابر با طول پاره خط AH است.

۲۶

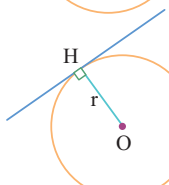
از نقطه A بر خط d عمود می‌کشیم و پای عمود را H می‌نامیم. فاصله نقطه A از خط d، برابر با طول پاره خط AH است.

۲۷

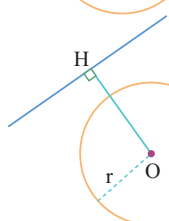


اگر فاصله مرکز دایره تا خط از شعاع دایره کم‌تر باشد، خط و دایره دو نقطه مشترک دارند و متقاطع‌اند.

$$OH < r$$



اگر فاصله مرکز دایره تا خط برابر شعاع دایره باشد، خط و دایره یک نقطه مشترک دارند یعنی خط بر دایره مماس است. $OH = r$



اگر فاصله مرکز دایره تا خط بیشتر از شعاع دایره باشد، خط و دایره هیچ نقطه مشترکی ندارند.

$$OH > r$$

۲۸

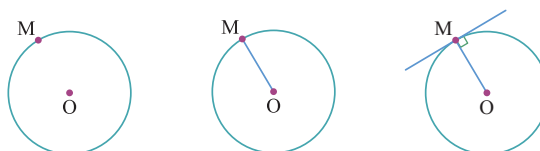
اگر هر نقطه دیگری غیر از F مانند B روی خط d در نظر بگیریم، فاصله‌شان تا نقطه O از مقدار شعاع دایره یعنی OF بیش‌تر است (زیرا OF بر خط d عمود است). بنابراین همه این نقاط خارج از دایره قرار دارند و خط و دایره تنها در یک نقطه F با هم مشترک هستند. پس می‌توان گفت که خط d بر دایره مماس است.

۲۹

هر نقطه دیگری غیر از F روی خط d مانند B خارج از دایره قرار دارد. بنابراین فاصله آن تا مرکز دایره بیش‌تر از شعاع دایره خواهد بود؛ یعنی $OB > r$. از طرف دیگر نقطه F روی دایره قرار دارد، بنابراین فاصله‌اش تا مرکز دایره برابر با شعاع دایره است؛ یعنی $OF = r$. بنابراین می‌توان گفت که نقطه F نزدیک‌ترین نقطه خط d به نقطه O می‌باشد. حال اگر بخواهیم از O بر خط d عمود کنیم، از آن جایی که فاصله O تا پای عمود، کوتاه‌ترین فاصله نقاط خط d تا O خواهد بود، بنابراین پای عمود همان نقطه F می‌باشد. پس شعاع OF در نقطه F بر خط d، عمود خواهد بود.

۳۰

می‌دانیم که خط مماس بر دایره C(O, r) در نقطه M بر شعاع OM عمود خواهد بود. بنابراین ابتدا شعاع OM را رسم می‌کنیم و سپس در نقطه M بر OM عمود می‌کشیم تا خط مماس بر دایره در نقطه M رسم شود.



از طرفی مثلث DOE نیز متساوی الساقین می باشد و زاویه $\widehat{OED}$ زاویه خارجی مثلث OEC است پس $\widehat{ODE} = \widehat{OED} = \alpha + \alpha = 2\alpha$ می باشد. مثلث ADO متساوی الاضلاع است، پس $\widehat{DAO} = \widehat{ADO} = 60^\circ$ هستند. حال در مثلث ADC داریم: $\widehat{A} + \widehat{D} + \widehat{C} = 180^\circ \Rightarrow 60^\circ + 60^\circ + 2\alpha + \alpha = 180^\circ$ $\Rightarrow 3\alpha = 60^\circ \Rightarrow \alpha = 20^\circ$

از O به E وصل می کنیم. $OC = OE$ می باشد، پس مثلث EOC متساوی الساقین بوده و زاویه $\widehat{OEC}$ برابر 30° می باشد. از طرفی مثلث EOD نیز متساوی الساقین است؛ زیرا $OE = OD$ می باشد، پس $\widehat{OED} = \widehat{ODE}$ بوده و داریم: $\widehat{OED} = \widehat{ODE} \Rightarrow 30^\circ + \alpha = 55^\circ \Rightarrow \alpha = 25^\circ$

چون نقطه A درون دایره است، پس فاصله اش تا مرکز دایره باید کمتر از شعاع دایره باشد. بنابراین داریم:

$OA < r \Rightarrow 5 - 2x < 4 \Rightarrow -2x < 4 - 5 \Rightarrow -2x < -1 \xrightarrow{+(-2)} x > \frac{1}{2}$
متما می دونی که چون طرفین نامساوی رو بر عدد منفی تقسیم کردیم، جهت نامساوی عوض شد.

از طرفی می دانیم فاصله دو نقطه بزرگتر یا مساوی صفر است، پس: $OA \geq 0 \Rightarrow 5 - 2x \geq 0 \Rightarrow 2x \leq 5 \Rightarrow x \leq \frac{5}{2}$
از اشتراک حدود به دست آمده برای x، محدوده آن به صورت $\frac{1}{2} < x \leq \frac{5}{2}$ خواهد بود.

چون نقطه A بیرون دایره $C(O, 4)$ نیست، پس درون یا روی دایره C می باشد و در نتیجه $OA \leq 4$ است. بنابراین داریم:

$OA \leq 4 \Rightarrow 6 - x \leq 4 \Rightarrow x \geq 6 - 4 \Rightarrow x \geq 2$
از طرفی فاصله دو نقطه همواره بزرگتر و یا مساوی صفر است، پس: $6 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 6$

از اشتراک حدود به دست آمده برای x، محدوده آن به صورت $2 \leq x \leq 6$ می باشد که مجموع مقادیر صحیح x برابر است با:

$$x = 2 \Rightarrow \text{مجموع مقادیر صحیح } x = 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 20$$

OA و OB شعاع های دایره هستند، پس:

$$OA = 4 \Rightarrow x^2 - 5x + 10 = 4 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow (x-2)(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$OB = 4 \Rightarrow 3x^2 - 7x + 6 = 4 \Rightarrow 3x^2 - 7x + 2 = 0 \Rightarrow (3x-1)(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ x = 2 \end{cases}$$

واضح است که $x = 2$ قابل قبول است زیرا OA و OB را برابر 4 می کند.

بیرون - مرکز دایره C نقطه $O(1, -1)$ و شعاع دایره برابر $r = 2$ است. پس:

$$OA = \sqrt{(-3-1)^2 + (2-(-1))^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

چون $OA > r$ است، پس A بیرون دایره است.

چون $OA > r$ است، پس نقطه A بیرون دایره است و داریم:

$$\begin{cases} \text{بیشترین فاصله} = OA + r \\ \text{کمترین فاصله} = OA - r \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{بیشترین فاصله} - \text{کمترین فاصله} = (OA + r) - (OA - r) = 2r$$

بنابراین اختلاف فاصله ها برابر $2r = 2 \times 3 = 6$ می باشد.

۸π - نقاط مورد نظر در ناحیه مقابل قرار دارند، پس:

$$S_{\text{رنگی}} = \pi(2)^2 - \pi(1)^2 = 4\pi - \pi = 3\pi$$

۱/۵ - چون $OA < r$ است، داریم:

$$\begin{cases} OA + r = 7 \\ r - OA = 4 \end{cases} \Rightarrow 2r = 11 \Rightarrow r = 5.5 \Rightarrow OA = 1.5$$

۹ - فاصله دورترین نقطه دایره تا نقطه A برابر $OA + r$ است، پس:

$$15 = 6 + r \Rightarrow r = 9$$

از O به E وصل می کنیم. چون OC و OE شعاع های دایره اند، پس با هم برابرند و مثلث COE متساوی الساقین است و داریم:

$$\widehat{OEC} = \widehat{OCE} = 30^\circ$$

از طرفی چون $DE = OC$ می باشد، پس $DE = OE$ بوده و مثلث DEO نیز متساوی الساقین بوده و چون زاویه $\widehat{OEC}$ زاویه خارجی این مثلث است، داریم:

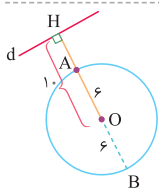
$$\widehat{OEC} = \alpha + \alpha \Rightarrow 30^\circ = 2\alpha \Rightarrow \alpha = 15^\circ$$

از O به D وصل می کنیم. چون OD و OB شعاع های دایره اند، پس با هم برابرند و از طرفی چون CD با OB برابر است، پس $CD = OD$ نیز می باشد و این یعنی مثلث ODC متساوی الساقین بوده و زاویه $\widehat{DOE}$ برابر 20° می باشد.

از طرفی واضح است که مثلث DOA نیز متساوی الساقین بوده و زاویه $\widehat{ADO}$ برابر α می باشد. زاویه $\widehat{ADO}$ زاویه خارجی مثلث ODC است، پس:

$$\widehat{ADO} = 20^\circ + 20^\circ \Rightarrow \alpha = 20^\circ + 20^\circ = 40^\circ$$

از O به E و D وصل می کنیم. با توجه به برابری پاره خط ها در شکل، OD و OE نیز با آن ها برابرند. مثلث OEC متساوی الساقین است، پس $\widehat{EOB} = \alpha$ می باشد.



$$\begin{cases} OH = 10 \\ r = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{کمترین فاصله} = AH = OH - r = 10 - 6 = 4 \\ \text{بیشترین فاصله} = BH = OH + r = 10 + 6 = 16 \end{cases}$$

۵۲

با توجه به شکل مقابل داریم:

۵۳

شعاع

۵۴

وتر

۵۵

قطر

۵۶

مرکز

۵۷

کمان

۵۸

درجه

۵۹

زاویه مرکزی

۶۰

قطاع

۶۱

نصف

۶۲

قطر دایره

۶۳

π - وقتی زاویه محاطی روبه‌رو کمان 15° است، زاویه مرکزی رو به آن

$$L = \frac{\pi \times 6 \times 30^\circ}{180^\circ} = \pi$$

۳۰° می‌باشد، پس:

۶۴

$$\text{طول کمان } \widehat{AB} \text{ برابر است با: } L = \frac{\pi R \alpha}{180^\circ} \Rightarrow L_{\widehat{AB}} = \frac{\pi \times 4 \times 90^\circ}{180^\circ} = 2\pi$$

۶۵

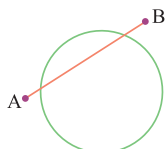
$$S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360^\circ} \Rightarrow S = \frac{\pi \times 9^2 \times 120^\circ}{360^\circ} = 27\pi$$

۶۶

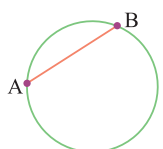
درست

۶۷

نادرست - در صورتی که دو نقطه متمایز دایره نقاط A و B باشند درست است.



AB وتر نیست.



AB وتر است.

۴۶

آ) چون A درون دایره است، پس باید $OA < r$ باشد:

$$OA < r \Rightarrow x + 7 < 3x - 3 \Rightarrow 2x > 10 \Rightarrow x > 5$$

از طرفی باید $r > 0$ و $OA \geq 0$ باشد، پس:

$$r > 0 \Rightarrow 3x - 3 > 0 \Rightarrow 3x > 3 \Rightarrow x > 1$$

$$OA \geq 0 \Rightarrow x + 7 \geq 0 \Rightarrow x \geq -7$$

از اشتراک حدود به دست آمده برای X، مقدار آن به صورت $x > 5$ می‌باشد.

ب) چون A بیرون دایره است، پس باید $OA > r$ باشد:

$$OA > r \Rightarrow x + 7 > 3x - 3 \Rightarrow 2x < 10 \Rightarrow x < 5$$

از طرفی باید $r > 0$ و $OA \geq 0$ باشد، پس:

$$r > 0 \Rightarrow 3x - 3 > 0 \Rightarrow x > 1$$

$$OA \geq 0 \Rightarrow x + 7 \geq 0 \Rightarrow x \geq -7$$

از اشتراک حدود به دست آمده $1 < x < 5$ می‌باشد.

توجه کن وقتی $r > 0$ است چون $OA > r$ هستش، پس متمماً $OA \geq 0$ همیشه.

۴۷

با توجه به داده‌های سؤال داریم:

$$\begin{cases} OA = 7 \\ r = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{فاصله دورترین نقطه} = OA + r = 7 + 4 = 11 \\ \text{فاصله نزدیک‌ترین نقطه} = OA - r = 7 - 4 = 3 \end{cases}$$

۴۸

فرض می‌کنیم شعاع دایره r باشد، پس: $OA + r = 2/\sqrt{5}r \Rightarrow OA = 1/\sqrt{5}r$

از آن جایی که OA برابر $1/\sqrt{5}r$ شده است پس نقطه A بیرون دایره است

و داریم:

$$OA - r = 4 \xrightarrow{OA=1/\sqrt{5}r} 1/\sqrt{5}r - r = 4 \Rightarrow 0/\sqrt{5}r = 4 \Rightarrow r = 8$$

۴۹

با توجه به صورت سؤال داریم:

$$\begin{cases} OA + r = 11 \\ |OA - r| = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} OA + r = 11 \\ OA - r = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2OA = 14 \Rightarrow OA = 7 \Rightarrow r = 4 \\ OA + r = 11 \\ r - OA = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2r = 14 \Rightarrow r = 7 \end{cases}$$

۵۰

چون خط d دایره C را در دو نقطه قطع می‌کند، پس $OH < r$ است:

$$OH < r \Rightarrow 10 - x < 3 \Rightarrow x > 7$$

از طرفی $OH \geq 0$ است، پس:

$$10 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 10$$

از اشتراک حدود به دست آمده، $7 < x \leq 10$ می‌باشد که مجموع مقادیر

طبیعی x برابر است با:

$$8 + 9 + 10 = 27$$

۵۱

چون خط d_1 بر دایره مماس است، پس:

$$OH_1 = r \Rightarrow a + 8 = 3a + 2 \Rightarrow 2a = 6 \Rightarrow a = 3$$

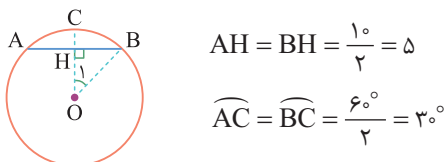
به ازای $a = 3$ اندازه شعاع دایره برابر $r = 3a + 2 = 3(3) + 2 = 11$ و

$$OH_2 < r \Rightarrow 5 - a = 5 - 3 = 2$$

است، خط d_2 قاطع است بنابراین خط d_2 و دایره دو نقطه مشترک دارند.

۸۵

از O بر وتر AB عمود کرده و امتداد می‌دهیم تا کمان AB را در نقطه C قطع کند. می‌دانیم OC وتر AB و کمان AB را نصف می‌کند، پس:



$$AH = BH = \frac{1}{2} \times 5 = \frac{5}{2}$$

$$\widehat{AC} = \widehat{BC} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$$

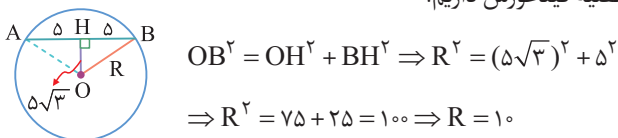
از O به B وصل می‌کنیم. زاویه O₁ زاویه مرکزی رو به کمان BC است، پس $\widehat{O_1} = \widehat{BC} = 30^\circ$ می‌باشد. حال در مثل قائم‌الزاویه OHB داریم:

$$\tan \widehat{O_1} = \frac{BH}{OH} \Rightarrow \tan 30^\circ = \frac{5/2}{OH} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{5/2}{OH}$$

$$\Rightarrow OH = \frac{3 \times 5}{2\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

۸۶

با توجه به صورت سؤال، شکل مسئله به صورت زیر است. می‌دانیم شعاع عمود بر وتر، آن وتر را نصف می‌کند. در مثل قائم‌الزاویه OHB به کمک قضیه فیثاغورس داریم:



$$OB^2 = OH^2 + BH^2 \Rightarrow R^2 = \left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow R^2 = 75 + 25 = 100 \Rightarrow R = 10$$

مثلث AOB متساوی‌الاضلاع است، پس $\widehat{AOB} = 60^\circ$ بوده و داریم:

$$L_{AB} = \frac{\pi \times 10 \times 60^\circ}{180^\circ} = \frac{10\pi}{3}$$

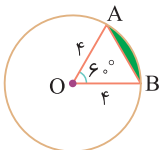
۸۷

$$S_{\text{قطعه}} = S_{\text{قطاع}} - S_{\triangle OAB}$$

$$\Rightarrow S_{\text{قطعه}} = \pi \left(\frac{4}{3}\right)^2 \times \frac{60^\circ}{360^\circ} - \frac{1}{2} \times 4^2 \times \sin 60^\circ$$

$$\Rightarrow S_{\text{قطعه}} = \frac{8\pi}{9} - \frac{1}{2} \times 4^2 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow S_{\text{قطعه}} = \frac{8\pi}{9} - 4\sqrt{3}$$



۸۸

اگر وترها در دایره برابر باشند، کمان‌های نظیر برابرند. چون شش ضلعی، منتظم است، پس کمان‌های نظیر ضلع‌های شش ضلعی برابرند.

$$6x = 360^\circ \Rightarrow x = 60^\circ$$

چون زاویه AOB زاویه مرکزی است، پس $\widehat{AOB} = 60^\circ$ می‌باشد؛ بنابراین مثلث AOB متساوی‌الاضلاع بوده و داریم:

$$S_{\triangle OAB} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 4^2 = 4\sqrt{3}$$

$$S = \frac{\pi \times (4)^2 \times 60^\circ}{360^\circ} = \frac{8\pi}{9}$$

مساحت قطاع AOB برابر است با:

بنابراین مساحت قسمت رنگی برابر $\frac{8\pi}{9} - 4\sqrt{3}$ می‌باشد.

۶۸

نادرست - اندازه زاویه مرکزی برابر اندازه کمان روبه‌رو به آن است.

۶۹

نادرست - اندازه یک کمان برابر با اندازه زاویه مرکزی مقابل به آن کمان است.

۷۰

درست - نیم‌دایره کمانی با اندازه ۱۸۰ است.

۷۱

نادرست - طول کمان AB از دایره C(O,R) روبه‌رو به زاویه مرکزی با اندازه α برابر $L = \frac{\pi R \alpha}{180^\circ}$ است.

۷۲

درست

۷۳

درست

۷۴

درست

۷۵

نادرست - مساحت قطاع مورد نظر $S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360^\circ}$ است.

۷۶

$$S = \frac{\pi \times 6^2 \times 120^\circ}{360^\circ} = 12\pi$$

نادرست

۷۷

به پاره‌خطی که یک سر آن مرکز دایره و سر دیگر آن نقطه‌ای روی دایره باشد، شعاع دایره می‌گویند.

۷۸

پاره‌خطی که دو سر آن روی دایره باشد را یک وتر از دایره می‌گویند.

۷۹

وتری از دایره که از مرکز دایره عبور می‌کند را قطر دایره می‌گویند.

۸۰

به قسمتی از محیط دایره که میان دو نقطه از آن محدود شده است را کمان می‌گویند.

۸۱

زاویه‌ای که رأس آن روی مرکز دایره و دو ضلع آن دو شعاع از دایره باشد را زاویه مرکزی می‌گویند.

۸۲

ناحیه‌ای از درون و روی دایره که به دو شعاع دایره و آن دایره محدود است را یک قطاع دایره می‌گویند.

۸۳

ناحیه محصور به یک وتر و کمان متناظرش را یک قطعه از دایره می‌گویند.

۸۴

اندازه کمان‌های AB و A'B' برابر زاویه مرکزی مقابل آن‌ها است، پس اندازه آن‌ها برابر ۶۰ می‌باشد. اما طول کمان‌های AB و A'B' برابر است با:

$$L = \frac{\pi R \alpha}{180^\circ} \Rightarrow \begin{cases} L_{AB} = \frac{\pi \times 1 \times 60^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi}{3} \\ L_{A'B'} = \frac{\pi \times 2 \times 60^\circ}{180^\circ} = \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

۹۴

از مرکز دایره به دو سر وتر AB وصل می‌کنیم. چون $AH = BH$ وتر AB را نصف کرده است، پس CD می‌باشد و داریم:

$$\begin{cases} OA = OB = r \\ AH = BH \\ OH = OH \text{ (ضلع مشترک)} \end{cases} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \triangle AHO \cong \triangle BHO$$

بنابراین اجزای متناظر دو مثلث با هم برابرند از جمله $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ و $\hat{H}_1 = \hat{H}_2$ می‌باشد، چون زوایای مرکزی O_1 و O_2 برابرند، پس کمان مقابل آن‌ها یعنی $\widehat{AD}$ و $\widehat{BD}$ برابرند؛ بنابراین CD ، کمان نظیر وتر AB را نصف کرده است. از طرفی چون $\hat{H}_1 + \hat{H}_2 = 180^\circ$ و $\hat{H}_1 = \hat{H}_2$ ، پس $\hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ$ می‌باشد، بنابراین قطر CD بر وتر AB عمود است.

۹۵

وتر نظیر کمان AB را رسم می‌کنیم. چون قطر CD کمان AB را نصف کرده است، پس $\widehat{AD} = \widehat{BD}$ می‌باشد. حال از مرکز دایره به دو سر وتر AB وصل می‌کنیم. چون $\widehat{AD} = \widehat{BD}$ می‌باشد، پس زوایای مرکزی مقابل کمان‌های AD و BD یعنی $\hat{O}_1$ و $\hat{O}_2$ با هم برابرند، پس:

$$\begin{cases} OA = OB = r \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \\ OH = OH \text{ (ضلع مشترک)} \end{cases} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \triangle AHO \cong \triangle BHO$$

بنابراین اجزای متناظر دو مثلث با هم برابرند یعنی $AH = BH$ و $\hat{H}_1 = \hat{H}_2$ می‌باشد. چون $AH = BH$ است پس قطر CD وتر نظیر کمان AB یعنی وتر AB را نصف کرده است. از آن جایی که $\hat{H}_1 + \hat{H}_2 = 180^\circ$ و $\hat{H}_1 = \hat{H}_2$ می‌باشند، پس $\hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ$ بوده و این یعنی قطر CD بر وتر نظیر کمان AB یعنی وتر AB عمود است.

۹۶

از O به B و C وصل می‌کنیم. به کمک قضیه فیثاغورس در مثلث‌های OCH' و OHB داریم:

$$\begin{aligned} OB^2 &= OH^2 + BH^2 \Rightarrow R^2 = OH^2 + BH^2 \\ \Rightarrow OH^2 &= R^2 - BH^2 \\ OC^2 &= OH'^2 + CH'^2 \\ \Rightarrow R^2 &= OH'^2 + CH'^2 \\ \Rightarrow OH'^2 &= R^2 - CH'^2 \end{aligned}$$

چون $OH < OH'$ است، پس $OH^2 < OH'^2$ می‌باشد و داریم:

$$R^2 - BH^2 < R^2 - CH'^2 \Rightarrow -BH^2 < -CH'^2 \Rightarrow BH^2 > CH'^2 \Rightarrow BH > CH$$

می‌دانیم H وسط وتر AB و H' وسط وتر CD است، پس:

$$BH > CH' \xrightarrow{\times 2} 2BH > 2CH' \Rightarrow AB > CD$$

۸۹

می‌دانیم دایره، کمانی با اندازه 36° درجه و طول $2\pi R$ است، پس به کمک تناسب زیر داریم:

$$\begin{array}{ccc} \text{اندازه} & \text{طول} & \\ 36^\circ & 2\pi R & \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} L \times 36^\circ = \alpha \times 2\pi R \\ \alpha & L & \end{array}$$

$$\Rightarrow L = \frac{\alpha \times 2\pi R}{36^\circ} \Rightarrow L = \frac{\pi R \alpha}{18^\circ}$$

۹۰

می‌دانیم دایره قطاعی با زاویه مرکزی 36° و مساحت πR^2 است، پس:

$$\begin{array}{ccc} \text{مساحت} & \text{زاویه مرکزی} & \\ \pi R^2 & 36^\circ & \\ S & \alpha & \Rightarrow \pi R^2 \times \alpha = 36^\circ \times S \Rightarrow S = \frac{\pi R^2 \alpha}{36^\circ} \end{array}$$

۹۱

از مرکز دایره به دو سر وترهای AB و CD وصل می‌کنیم. چون $\widehat{AB} = \widehat{CD}$ است، پس زوایای مرکزی مقابل آن‌ها یعنی $\hat{O}_1$ و $\hat{O}_2$ برابرند، پس:

$$\begin{cases} \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \\ OA = OD = r \\ OB = OC = r \end{cases} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \triangle AOB \cong \triangle COD$$

بنابراین اجزای متناظر دو مثلث با هم برابرند، پس $AB = CD$ می‌باشد.

۹۲

از مرکز دایره به دو سر وترهای AB و CD وصل می‌کنیم. پس:

$$\begin{cases} OA = OC = r \\ OB = OD = r \\ AB = CD \end{cases} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \triangle AOB \cong \triangle COD$$

بنابراین اجزای متناظر دو مثلث با هم برابرند، پس $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ می‌باشد؛ چون O_1 و O_2 زوایای مرکزی رو به کمان‌های AB و CD هستند، پس $\widehat{AB} = \widehat{CD}$ می‌باشد.

۹۳

از مرکز دایره به دو سر وتر AB وصل می‌کنیم و داریم:

$$\begin{cases} OA = OB = r \\ OH = OH \text{ (ضلع مشترک)} \end{cases} \xrightarrow{\text{برابری وتر و یک ضلع}} \triangle OHA \cong \triangle OHB$$

بنابراین اجزای متناظر دو مثلث با هم برابرند، از جمله $AH = BH$ و $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ می‌باشد.

چون $AH = BH$ است، پس قطر CD وتر AB را نصف کرده است و چون زوایای مرکزی $\hat{O}_1$ و $\hat{O}_2$ برابرند، پس کمان نظیر آن‌ها یعنی $\widehat{AD}$ و $\widehat{BD}$ نیز برابر می‌باشند، پس قطر CD کمان AB را نیز نصف کرده است.

۱۰۳

دایره کمانی با اندازه 36° است، پس:

$$\widehat{ABC} + \widehat{AC} = 36^\circ \Rightarrow 23^\circ + \widehat{AC} = 36^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{AC} = 13^\circ$$

می دانیم اندازه زاویه مرکزی با اندازه کمان روبه رویش برابر است، پس:

$$2\alpha + 40^\circ = 13^\circ \Rightarrow 2\alpha = 9^\circ \Rightarrow \alpha = 4.5^\circ$$

۱۰۴

مثلث های AOD و BOC متساوی الساقین هستند، پس:

$$\widehat{OAD} = \widehat{ODA} = 6^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{DOA} = 180^\circ - (6^\circ + 6^\circ) = 168^\circ$$

$$\widehat{OBC} = \widehat{OCB} = 8^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{BOC} = 180^\circ - (8^\circ + 8^\circ) = 164^\circ$$

بنابراین زاویه $\widehat{AOB}$ برابر است با:

$$\widehat{AOB} = 180^\circ - (6^\circ + 2^\circ) = 172^\circ$$

زاویه $\widehat{AOB}$ زاویه مرکزی رو به کمان $\widehat{AB}$ است، پس:

$$\widehat{AOB} = \widehat{AB} \Rightarrow \alpha = 172^\circ$$

۱۰۵

از O به C و D وصل می کنیم. مثلث های AOC و BOD متساوی الساقین هستند، پس:

$$\begin{cases} \widehat{OCA} = \widehat{OAC} = 55^\circ \\ \widehat{AOC} + 55^\circ + 55^\circ = 180^\circ \Rightarrow \widehat{AOC} = 70^\circ \\ \widehat{ODB} = \widehat{OBD} = 5^\circ \\ \widehat{BOD} + 5^\circ + 5^\circ = 180^\circ \Rightarrow \widehat{BOD} = 170^\circ \end{cases}$$

حال داریم:

$$70^\circ + \widehat{COD} + 180^\circ = 180^\circ \Rightarrow \widehat{COD} = 30^\circ$$

زاویه $\widehat{COD}$ زاویه مرکزی رو به کمان $\widehat{CD}$ است، پس:

$$\widehat{COD} = \widehat{CD} \Rightarrow \widehat{CD} = 30^\circ$$

۱۰۶

مثلث AOC متساوی الساقین است، پس:

$$\widehat{ACO} = 80^\circ \Rightarrow \widehat{AOC} = 180^\circ - (80^\circ + 80^\circ) = 20^\circ$$

زوایای $\widehat{AOC}$ و $\widehat{BOD}$ زوایای مرکزی هستند، پس:

$$\widehat{AOC} = \widehat{AC} \Rightarrow \widehat{AC} = 20^\circ$$

$$\widehat{BOD} = \widehat{BD} \Rightarrow \widehat{BD} = 40^\circ$$

حال چون AB قطر دایره است داریم:

$$\widehat{AC} + \widehat{CD} + \widehat{BD} = 180^\circ \Rightarrow 20^\circ + \alpha + 40^\circ = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 120^\circ$$

۱۰۷

از O به B وصل می کنیم. زاویه $\widehat{AOB}$ زاویه مرکزی رو به کمان $\widehat{AB}$ است، پس:

$$\widehat{AOB} = \widehat{AB} \Rightarrow \widehat{AOB} = 15^\circ$$

مثلث AOB متساوی الساقین است، پس:

$$15^\circ + \alpha + \alpha = 180^\circ \Rightarrow 2\alpha = 165^\circ \Rightarrow \alpha = 82.5^\circ$$

۹۷

از O به B و C وصل می کنیم. می دانیم H وسط AB و H' وسط CD می باشد، پس:

$$AB > CD \Rightarrow \frac{AB}{2} > \frac{CD}{2} \Rightarrow BH > CH'$$

حال به کمک قضیه فیثاغورس در مثلث های OHB و OCH' داریم:

$$\begin{aligned} OB^2 &= OH^2 + BH^2 \Rightarrow R^2 = OH^2 + BH^2 \\ \Rightarrow BH^2 &= R^2 - OH^2 \\ OC^2 &= OH'^2 + CH'^2 \\ \Rightarrow R^2 &= OH'^2 + CH'^2 \\ \Rightarrow CH'^2 &= R^2 - OH'^2 \end{aligned}$$

چون $BH > CH'$ است، پس $BH^2 > CH'^2$ می باشد و داریم:

$$R^2 - OH^2 > R^2 - OH'^2 \Rightarrow -OH^2 > -OH'^2 \Rightarrow OH^2 < OH'^2 \Rightarrow OH < OH'$$

۹۸

بزرگ ترین وتر همان قطر دایره است که طول آن دو برابر طول شعاع دایره می باشد، پس:

$$6x + 2 = 2 \times 10 \Rightarrow 6x = 20 - 2 \Rightarrow 6x = 18 \Rightarrow x = 3$$

۹۹

(آ) دایره کمانی با اندازه 36° است، پس:

$$\begin{aligned} \widehat{AB} + \widehat{BC} + \widehat{AC} &= 36^\circ \Rightarrow 2x + 4x + 3x = 36^\circ \\ \Rightarrow 9x &= 36^\circ \Rightarrow x = 4^\circ \end{aligned}$$

(ب) دایره کمانی با اندازه 36° است، پس:

$$\begin{aligned} \widehat{AB} + \widehat{BC} + \widehat{AC} &= 36^\circ \Rightarrow 2x + 10^\circ + 4x - 12^\circ + 3x + 2^\circ = 36^\circ \\ \Rightarrow 9x - 9^\circ &= 36^\circ \Rightarrow 9x = 45^\circ \Rightarrow x = 5^\circ \end{aligned}$$

۱۰۰

زاویه $\widehat{AOB}$ زاویه مرکزی است پس اندازه آن با اندازه کمان روبه رویش برابر است:

$$\widehat{AOB} = \widehat{AB} \Rightarrow 70^\circ = 5\alpha - 20^\circ$$

$$\Rightarrow 5\alpha = 90^\circ \Rightarrow \alpha = 18^\circ$$

۱۰۱

زاویه $\widehat{AOB}$ زاویه مرکزی است، پس اندازه آن با اندازه کمان مقابلش برابر است. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} \widehat{AOB} = \widehat{AB} &\Rightarrow \alpha + 30^\circ = 2\alpha - 40^\circ \\ \Rightarrow \alpha &= 70^\circ \end{aligned}$$

۱۰۲

دایره کمانی با اندازه 36° است، پس:

$$4x - 40^\circ + x + 20^\circ = 36^\circ \Rightarrow 5x = 380^\circ \Rightarrow x = 76^\circ$$

زاویه $\widehat{AOB}$ زاویه مرکزی است، پس:

$$\widehat{AOB} = \widehat{AB} \Rightarrow \alpha = x + 20^\circ \xrightarrow{x=76^\circ} \alpha = 96^\circ$$

۱۱۳

از O به D و E وصل می‌کنیم. مثلث OEC متساوی الساقین است، پس $\widehat{EOC} = 15^\circ$ می‌باشد.

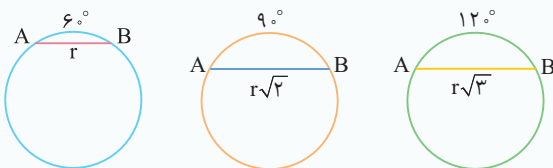
از طرفی زاویه $\widehat{OED}$ زاویه خارجی مثلث OEC است، پس $\widehat{OED} = 15^\circ + 15^\circ = 30^\circ$ می‌باشد و چون مثلث DOE متساوی الساقین است، داریم:

$$\begin{cases} \widehat{ODE} = \widehat{OED} = 30^\circ \\ \widehat{DOE} + 30^\circ + 30^\circ = 180^\circ \Rightarrow \widehat{DOE} = 120^\circ \end{cases}$$

می‌دانیم اندازه زاویه مرکزی DOE برابر اندازه کمان DE است، پس: $\widehat{DOE} = \widehat{DE} \Rightarrow \alpha = 120^\circ$

۱۱۴

گاهی به جای این‌که اندازه کمانی را بدهند، طول وتر متناظر با آن را می‌دهند. در دایره $C(O, r)$ حالت‌های زیر را حفظ باشید.



برای اثبات هر یک، کافی است از مرکز دایره به A و B وصل کنید. مثلث AOB متساوی الساقین است و زاویه رأس آن، زاویه مرکزی رو به کمان AB است. پس با به دست آوردن اندازه زاویه $\widehat{AOB}$ اندازه کمان AB به دست می‌آید.

چون اندازه وتر AB برابر شعاع دایره است، پس $\widehat{AB} = \alpha = 60^\circ$ می‌باشد.

۱۱۵

چون اندازه وتر AB، $\sqrt{3}$ برابر شعاع دایره است، پس $\widehat{AB} = \alpha = 120^\circ$ می‌باشد.

۱۱۶

از O به A وصل می‌کنیم. چون وتر AB، $\sqrt{2}$ برابر شعاع است، پس $\widehat{AB} = 90^\circ$ می‌باشد. حال در مثلث قائم‌الزاویه و متساوی الساقین AOB داریم:

$$90^\circ + \alpha + \alpha = 180^\circ \Rightarrow 2\alpha = 90^\circ \Rightarrow \alpha = 45^\circ$$

۱۱۷

با توجه به رابطه طول کمان داریم:

$$L_{\widehat{AB}} = \frac{\pi R \alpha}{180^\circ} \Rightarrow 2\pi = \frac{\pi \times 5 \times \alpha}{180^\circ} \Rightarrow \alpha = 72^\circ$$

۱۱۸

با توجه به رابطه طول کمان داریم:

$$L = \frac{\pi R \alpha}{180^\circ} \Rightarrow 6\pi = \frac{\pi \times R \times 10^\circ \alpha}{180^\circ} \Rightarrow R = 10$$

۱۰۸

از O به A وصل می‌کنیم. مثلث AOB متساوی الساقین است زیرا $OA = OB$ می‌باشد، پس:

$$\begin{aligned} \widehat{ABO} = \widehat{BAO} &= 42^\circ \\ \Rightarrow \widehat{AOB} &= 180^\circ - (42^\circ + 42^\circ) = 96^\circ \\ \text{زاویه } \widehat{AOB}, \text{ زاویه مرکزی است، پس:} \\ \widehat{AOB} = \widehat{AB} &\Rightarrow \widehat{AB} = \alpha = 96^\circ \end{aligned}$$

۱۰۹

زاویه $\widehat{AOB}$ زاویه مرکزی است، پس اندازه آن با اندازه کمان روبه‌رویش برابر است. بنابراین داریم: $\widehat{AOB} = \widehat{AB} = 80^\circ$ مثلث AOB متساوی الساقین است ($OA = OB$)، پس:

$$\begin{aligned} \widehat{OAB} = \widehat{OBA} &= \frac{180^\circ - 80^\circ}{2} = 50^\circ \\ \text{مثلث OBC متساوی الساقین است } (OB = OC), \text{ پس:} \\ \widehat{OBC} &= 180^\circ - (80^\circ + 80^\circ) = 20^\circ \\ \text{بنابراین } \alpha &= \widehat{OBA} - \widehat{OBC} = 50^\circ - 20^\circ = 30^\circ \end{aligned}$$

۱۱۰

از O به A وصل می‌کنیم. زاویه $\widehat{AOB}$ زاویه مرکزی رو به کمان AB است، پس: $\widehat{AOB} = \widehat{AB} \Rightarrow \widehat{AOB} = 85^\circ$

بنابراین زاویه $\widehat{AOC}$ برابر $135^\circ - 85^\circ = 50^\circ$ می‌باشد. مثلث AOC متساوی الساقین است زیرا $OA = OC$ می‌باشد. پس: $50^\circ + \alpha + \alpha = 180^\circ \Rightarrow 2\alpha = 130^\circ \Rightarrow \alpha = 65^\circ$

۱۱۱

از O به B وصل می‌کنیم. مثلث AOB متساوی الساقین است، پس:

$$\begin{aligned} \widehat{ABO} = \widehat{BAO} &= 50^\circ \\ \widehat{AOB} + 50^\circ + 50^\circ &= 180^\circ \Rightarrow \widehat{AOB} = 80^\circ \end{aligned}$$

زاویه $\widehat{AOD} = \widehat{AD} \Rightarrow \widehat{AOD} = 100^\circ$ پس: $\widehat{AOD} = 100^\circ$ می‌دانیم مجموع زوایای مرکزی در دایره 360° است، پس:

$$\begin{aligned} \widehat{AOD} + \widehat{DOC} + \widehat{AOB} + \widehat{BOC} &= 360^\circ \\ \Rightarrow 100^\circ + 120^\circ + 80^\circ + \widehat{BOC} &= 360^\circ \Rightarrow \widehat{BOC} = 60^\circ \end{aligned}$$

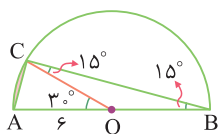
مثلث BOC متساوی الساقین است زیرا $OB = OC$ می‌باشد. از طرفی چون زاویه رأس آن 60° است، پس متساوی‌الاضلاع می‌باشد و $\alpha = 60^\circ$ است.

۱۱۲

مثلث AOC متساوی الساقین است، پس: $\widehat{ACO} = \widehat{CAO} = 35^\circ$ زاویه $\widehat{COB}$ زاویه خارجی مثلث AOC است، پس: $\widehat{COB} = 35^\circ + 35^\circ = 70^\circ$

از طرفی زاویه $\widehat{COB}$ زاویه مرکزی رو به کمان BC است، پس: $\widehat{COB} = \widehat{BC} \Rightarrow \widehat{BC} = 70^\circ \Rightarrow \alpha = 70^\circ$

۱۲۴



از O به C وصل می‌کنیم. مثلث COB متساوی الساقین است، پس اندازه زاویه $\widehat{AOC}$ که زاویه خارجی مثلث COB است، برابر $15^\circ + 15^\circ = 30^\circ$ می‌باشد، پس:

$$S_{\text{رنگی}} = \frac{\pi(6)^2 \times 30^\circ}{360^\circ} - \frac{1}{2} \times 6 \times 6 \times \sin 30^\circ = 3\pi - 9$$

۱۲۵

با توجه به رابطه مساحت قطاع داریم:

$$S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360^\circ} \Rightarrow \frac{\pi \times 6^2 \times 60^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi \times (3\sqrt{2})^2 \times \alpha}{360^\circ} \Rightarrow \alpha = 120^\circ$$

۱۲۶

فرض می‌کنیم $AC = r$ باشد، پس $OC = 2r$ است. با توجه به رابطه مساحت قطاع یعنی $S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360^\circ}$ داریم:

$$S_{\text{رنگی}} = S_{AOB} - S_{COD} \Rightarrow 15 = \frac{\pi(2r)^2 \times \alpha}{360^\circ} - \frac{\pi(r)^2 \times \alpha}{360^\circ}$$

$$\Rightarrow 15 = \frac{5r^2 \pi \alpha}{360^\circ} \Rightarrow \pi r^2 \alpha = 3 \times 360^\circ$$

از طرفی مساحت قطاع COD برابر است با:

$$S_{COD} = \frac{\pi(r)^2 \times \alpha}{360^\circ} \Rightarrow S_{COD} = \frac{4\pi r^2 \alpha}{360^\circ}$$

$$\xrightarrow{\pi r^2 \alpha = 3 \times 360^\circ} S_{COD} = \frac{4 \times 3 \times 360^\circ}{360^\circ} = 12$$

۱۲۷

ابتدا به کمک طول کمان AB اندازه زاویه $\widehat{AOB}$ را به دست می‌آوریم:

$$L = \frac{\pi R \alpha}{180^\circ} \Rightarrow 5\pi = \frac{\pi \times 6 \times \alpha}{180^\circ} \Rightarrow \alpha = 150^\circ$$

حال مساحت قطاع‌های AOB و COD را به دست می‌آوریم:

$$S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360^\circ} \Rightarrow \begin{cases} S = \frac{\pi(6)^2 \times 150^\circ}{360^\circ} = 15\pi \\ S = \frac{\pi(4)^2 \times 150^\circ}{360^\circ} = \frac{20\pi}{3} \end{cases}$$

بنابراین مساحت ناحیه رنگی برابر است با:

$$S_{\text{رنگی}} = 15\pi - \frac{20\pi}{3} = \frac{45\pi - 20\pi}{3} = \frac{25\pi}{3}$$

۱۲۸

شعاع OB بر خط مماس AB عمود است. در مثلث قائم‌الزاویه OBA، OB نصف وتر OA است، پس زاویه $\widehat{A} = 30^\circ$ و $\widehat{O} = 60^\circ$ خواهد بود.

$$S_{\Delta OBA} = \frac{1}{2} \times 3 \times 6 \times \sin 60^\circ = \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

$$S_{COB} = \frac{\pi(3)^2 \times 60^\circ}{360^\circ} = \frac{3\pi}{2}$$

بنابراین مساحت ناحیه رنگی برابر است با:

$$S_{\text{رنگی}} = \frac{9\sqrt{3}}{2} - \frac{3\pi}{2} = \frac{9\sqrt{3} - 3\pi}{2}$$

۱۲۹

فرض می‌کنیم شعاع دایره کوچک برابر r باشد. با توجه به رابطه طول کمان داریم:

$$\frac{\pi r \alpha}{180^\circ} = \frac{3}{5} \times \frac{\pi(r+4) \times \alpha}{180^\circ} \Rightarrow r\alpha = \frac{3}{5}(r+4)\alpha$$

$$\Rightarrow r\alpha = \frac{3}{5}r\alpha + \frac{12}{5}\alpha \Rightarrow \frac{2}{5}r\alpha = \frac{12}{5}\alpha \Rightarrow r = 6$$

$$L_{EF} = \frac{\pi \times 6 \times 90^\circ}{180^\circ} = 3\pi \quad \text{حال طول کمان EF برابر است با:}$$

۱۳۰

فرض می‌کنیم شعاع دایره بزرگ‌تر R و شعاع دایره کوچک‌تر r باشد، پس محیط ناحیه رنگی برابر $2\pi R + 2\pi r$ و مساحت آن $\pi R^2 - \pi r^2$ است،

بنابراین داریم:

$$\begin{cases} 2\pi R + 2\pi r = 20\pi \Rightarrow R + r = 10 \\ \pi R^2 - \pi r^2 = 20\pi \Rightarrow R^2 - r^2 = 20 \end{cases}$$

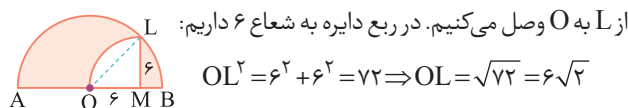
$$\Rightarrow \begin{cases} R + r = 10 \\ (R-r)(R+r) = 20 \end{cases} \Rightarrow R - r = 2$$

حال داریم:

$$\begin{cases} R + r = 10 \\ R - r = 2 \end{cases} \Rightarrow 2R = 12 \Rightarrow R = 6$$

بنابراین مساحت دایره بزرگ‌تر برابر $S = \pi(6)^2 = 36\pi$ است.

۱۳۱



از L به O وصل می‌کنیم. در ربع دایره به شعاع 6 داریم:

$$OL^2 = 6^2 + 6^2 = 72 \Rightarrow OL = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$$

بنابراین شعاع نیم دایره برابر $6\sqrt{2}$ است، پس:

$$S_{\text{رنگی}} = \frac{1}{2} \pi (6\sqrt{2})^2 - \frac{1}{4} \pi (6)^2 = 36\pi - 9\pi = 27\pi$$

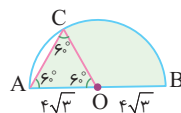
۱۳۲

با توجه به رابطه مساحت قطاع داریم:

$$S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360^\circ} \Rightarrow S = \frac{\pi \times 5^2 \times 72^\circ}{360^\circ} = 5\pi$$

۱۳۳

چون طول قطر نیم دایره $8\sqrt{3}$ است، پس طول شعاع آن برابر $4\sqrt{3}$ می‌باشد. از مرکز نیم دایره به نقطه C وصل می‌کنیم. مثلث OAC متساوی الساقین است چون $OA = OC$ می‌باشد و از طرفی چون زاویه $\widehat{CAO} = 60^\circ$ می‌باشد، پس مثلث OAC متساوی الاضلاع می‌باشد. از طرفی زاویه $\widehat{COB}$ برابر $120^\circ - 60^\circ = 60^\circ$ است. حال مساحت مثلث AOC و قطاع COB را به دست می‌آوریم:



$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \Rightarrow S_{\Delta AOC} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times (4\sqrt{3})^2 = 12\sqrt{3}$$

$$S_{\text{قطاع}} = \frac{\pi R^2 \alpha}{360^\circ} \Rightarrow S_{\text{قطاع}} = \frac{\pi(4\sqrt{3})^2 \times 120^\circ}{360^\circ} = 16\pi$$

بنابراین مساحت ناحیه رنگی برابر است با:

$$S_{\text{رنگی}} = 12\sqrt{3} + 16\pi$$

مساحت مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین AOB برابر است با:
 $S = \frac{1}{2} \times 6 \times 6 = 18$
 بنابراین مساحت قسمت رنگی برابر $9\pi - 18$ می‌باشد.

۱۳۳

می‌دانیم دایره کمانی با اندازه 36° است، پس:
 $\widehat{AB} + 21^\circ = 36^\circ \Rightarrow \widehat{AB} = 15^\circ$

زاویه مرکزی $\widehat{AOB}$ برابر اندازه کمان روبه‌رویش است. پس:
 $\widehat{AOB} = \widehat{AB} \Rightarrow \widehat{AOB} = 15^\circ$
 حال مساحت قطاع AOB را به‌دست می‌آوریم:

$$S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360^\circ} \Rightarrow S = \frac{\pi (4)^2 \times 15^\circ}{360^\circ} = \frac{20\pi}{3}$$

مساحت مثلث AOB برابر است با:

$$S = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 \times \sin 15^\circ = \frac{1}{2} \times 16 \times \frac{1}{4} = 4$$

بنابراین مساحت قسمت رنگی برابر $\frac{20\pi}{3} - 4$ می‌باشد.

۱۳۴

مساحت قطاع AOB برابر است با:

$$S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360^\circ} \Rightarrow S = \frac{\pi (6)^2 \times 15^\circ}{360^\circ} = 15\pi$$

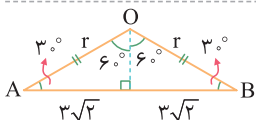
مساحت مثلث AOB برابر است با:

$$S = \frac{1}{2} \times 6 \times 6 \times \sin 15^\circ = \frac{1}{2} \times 36 \times \frac{1}{4} = 9$$

بنابراین مساحت قسمت رنگی برابر $15\pi - 9$ می‌باشد.

۱۳۵

ابتدا شعاع دایره را به‌دست می‌آوریم:



$$\cos 30^\circ = \frac{3\sqrt{2}}{r} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{r}$$

$$\Rightarrow 6\sqrt{2} = \sqrt{3}r \Rightarrow r = \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{6}$$

حال داریم:

$$S_{\text{رنگی}} = \frac{\pi (2\sqrt{6})^2 \times 120^\circ}{360^\circ} - \frac{1}{2} \times 2\sqrt{6} \times 2\sqrt{6} \times \sin 120^\circ$$

$$= \frac{\pi \times 24}{3} - \frac{12\sqrt{3}}{2} = 8\pi - 6\sqrt{3}$$

۱۳۶

چون قطر AB بر وتر CD عمود است، پس آن

را نصف می‌کند. بنابراین داریم:

$$AB = 24 \Rightarrow 2r = 24 \Rightarrow r = 12$$

$$CD = 22 \Rightarrow CH = DH = 11$$

حال از O به C وصل می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویه OHC داریم:

$$OC^2 = OH^2 + CH^2 \Rightarrow 17^2 = OH^2 + 11^2 \Rightarrow OH^2 = 33$$

$$\Rightarrow OH = \sqrt{33}$$

بنابراین طول پاره‌خط BH برابر است با:

$$BH = OB - OH \Rightarrow BH = 12 - \sqrt{33}$$

۱۳۹

مساحت قطاع COE برابر است با:

$$S = \frac{\pi r^2 \alpha}{360^\circ} \Rightarrow S_{\text{COE}} = \frac{\pi r^2 \times (180^\circ - \alpha)}{360^\circ}$$

مساحت ناحیه رنگی در دایره بزرگتر برابر است با:

$$S = \frac{\pi (2r)^2 \alpha}{360^\circ} - \frac{\pi r^2 \alpha}{360^\circ} = \frac{3\pi r^2 \alpha}{360^\circ}$$

حال داریم:

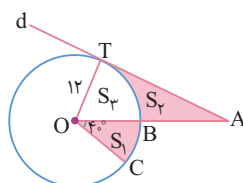
$$\frac{\pi r^2 \times (180^\circ - \alpha)}{360^\circ} = \frac{3\pi r^2 \alpha}{360^\circ} \Rightarrow 180^\circ - \alpha = 3\alpha$$

$$\Rightarrow 4\alpha = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 45^\circ$$

۱۳۰

اگر به جای زاویه مرکزی قطاع، طول کمان متناظر با قطاع را داشته باشیم، مساحت را می‌توان به‌طور مستقیم از رابطه زیر به‌دست آورد:

$$S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360^\circ} \Rightarrow S = \frac{\pi R \alpha}{180^\circ} \times \frac{R}{2} \Rightarrow S = L \times \frac{R}{2} \Rightarrow \boxed{S = \frac{1}{2} RL}$$



فرض می‌کنیم مساحت ناحیه‌ها مطابق

شکل S_1 ، S_2 و S_3 باشد. بنابراین داریم:

$$S_1 = \frac{\pi (12)^2 \times 40^\circ}{360^\circ} = 16\pi$$

از طرفی OT بر d عمود است. با فرض $AT = \widehat{BAC} = L$ داریم:

$$\begin{cases} S_1 + S_2 = \frac{1}{2} RL \Rightarrow S_1 + S_2 = \frac{1}{2} \times 12 \times L \\ S_2 + S_3 = \frac{1}{2} \times L \times 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_1 + S_2 = \frac{1}{2} \times L \times 12 \\ S_2 + S_3 = \frac{1}{2} \times L \times 12 \end{cases}$$

$$\Rightarrow S_1 + S_2 = S_2 + S_3 \Rightarrow S_1 = S_3$$

بنابراین $S_1 = S_3 = 16\pi$ بوده و مجموع مساحت ناحیه‌های رنگی

$S_1 + S_2 = 16\pi + 16\pi = 32\pi$ می‌باشد.

۱۳۱

ابتدا مساحت قطاع AOB را به‌دست می‌آوریم. چون مثلث AOB

متساوی‌الاضلاع است، پس $\widehat{AOB} = 60^\circ$ می‌باشد:

$$S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360^\circ} \Rightarrow S = \frac{\pi (6)^2 \times 60^\circ}{360^\circ} = 6\pi$$

مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع AOB برابر است با:

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \Rightarrow S = \frac{\sqrt{3}}{4} \times (6)^2 = 9\sqrt{3}$$

بنابراین مساحت قسمت رنگی برابر $6\pi - 9\sqrt{3}$ می‌باشد.

۱۳۲

ابتدا مساحت قطاع AOB را به‌دست می‌آوریم:

$$S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360^\circ} \Rightarrow S = \frac{\pi (6)^2 \times 90^\circ}{360^\circ} = 9\pi$$