

سلام

در این کتاب به شما یاد داده‌ام که چه مطالبی را برای شرکت در امتحانات تشریحی باید بدانیم تا مفاهیم و نکات خاصی که برای شرکت در کنکور سراسری بلدید را با خود سر جلسه نبرید و از آن‌ها در پاسخ‌گویی استفاده نکنید. این کار را با ارائه بسته‌های آموزشی مفید، مختصر و مهندسی‌شده انجام داده‌ام.

در انتهای هر بسته آموزشی، تعداد زیادی سؤال که از نظر تعداد و درجه سختی متناسب با مطالب آن بسته و امتحانات تشریحی است آورده‌ام.

با حل این سؤالات آمادگی لازم برای کسب نمره ۲۰ در هر آزمون تشریحی را کسب می‌کنید. زیرا تمام تمرینات، فعالیت‌ها، کار در کلاس‌های کتاب درسی و تمرینات تکمیلی کتاب راهنمای معلم را پوشش داده‌ام. هم‌چنین تمام تمرینات کتاب درسی در یک ضمیمه رایگان در اختیار شما قرار گرفته است.

پاسخ تشریحی سؤالات هم به گونه‌ای است که قابل فهم، خودآموز و راهگشا باشد.

فهرست

پاسخ	درسنامه و سؤالات
۱۴۲	۵ تا ۶
۱۷۴	۱۰۷ تا ۵۱
۲۱۵	۱۳۹ تا ۱۰۸

فصل اول: ماتریس و کاربردها

فصل دوم: آشنایی با مقاطع مخروطی

فصل سوم: بردارها

امتحان نهایی



بارمبندی درس هندسه ۳		
شماره فصل	نوبت اول	نوبت دوم
اول	۱۰	۵
دوم	۱۰	۴
	-	۴
سوم	-	۷
جمع	۲۰	۲۰

۲۳۶	آزمون ۱: خرداد ماه ۱۴۰۱
۲۳۷	آزمون ۲: شهریور ماه ۱۴۰۱
۲۳۸	آزمون ۳: دی ماه ۱۴۰۱
۲۳۹	آزمون ۴: خرداد ماه ۱۴۰۲
۲۴۱	آزمون ۵: شهریور ماه ۱۴۰۲
۲۴۲	آزمون ۶: دی ماه ۱۴۰۲
۲۴۳	آزمون ۷: خرداد ماه ۱۴۰۳
۲۴۴	آزمون ۸: مرداد ماه ۱۴۰۳
۲۴۶	پاسخنامه تشریحی آزمون ۱ تا ۸

1

بخش



درستنامه

و سوالات تشریحی

فصل اول

درس اول: ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها (قسمت اول)

هندسه دوازدهم

آشنایی با ماتریس



ماتریس: هر آرایش مستطیلی از اعداد حقیقی، شامل تعدادی سطر و ستون یک ماتریس نامیده می‌شود. معمولاً ماتریس‌ها را با حروف بزرگ مانند A, B, C و... نامگذاری می‌کنند. به ماتریس A توجه کنید. این ماتریس دارای دو سطر و سه ستون است.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \pi \\ \sqrt{3} & 4 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \pi \\ \sqrt{3} & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{سطر اول} \\ \leftarrow \text{سطر دوم} \end{matrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \pi \\ \sqrt{3} & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{ستون اول} \\ \leftarrow \text{ستون دوم} \\ \leftarrow \text{ستون سوم} \end{matrix}$$

هواست باشه که سطرها رو از بالا به پایین و ستون‌ها رو از چپ به راست شماره‌گذاری می‌کنیم.

مرتبه ماتریس: اگر ماتریس A دارای m سطر و n ستون باشد می‌نویسیم $A_{m \times n}$ و به صورت A ماتریسی از مرتبه m در n (یا از مرتبه $m \times n$) است، می‌خوانیم. (یادت باشه که برای بیان مرتبه ماتریس، عدد سمت چپ به تعداد سطرهاست و عدد سمت راست به تعداد ستون‌ها). مثلاً در مثال بالا ماتریس A یک ماتریس از مرتبه ۲ در ۳ است. باورت میشه که از تعاریف هم سؤال میار تو نهایی. تمرین پایینو نگاه کن.

(دی ۱۴۰۰)

؟ جای خالی را با عبارت مناسب پُر کنید.

هر آرایش مستطیلی از اعداد حقیقی، شامل تعدادی سطر و ستون، نامیده می‌شود.

ماتریس

درایه ماتریس: هر عدد حقیقی واقع در ماتریس را درایه آن ماتریس می‌نامیم. مثلاً در ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ به ۱، ۲، ۳ و ۴ درایه‌های ماتریس A می‌گوییم. درایه‌های هر ماتریس را با حرف کوچک اسم ماتریس نشان می‌دهیم و به منظور مشخص کردن جایگاه آن، دو اندیس در نظر می‌گیریم که اندیس سمت چپ شماره سطر و اندیس سمت راست شماره ستون آن درایه را مشخص می‌کند (اندریس همون عددهای کوچک‌لویی هستن که زیر حروف قرار می‌دیم). یعنی a_{ij} یعنی درایه سطر i ام و ستون j ام ماتریس A.

مثال $A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$

تعداد درایه‌های ماتریس: یک ماتریس از مرتبه m در n، دارای $m \times n$ درایه است. مثلاً یک ماتریس ۳ در ۴ دارای $3 \times 4 = 12$ درایه است.

ماتریس با درایه عمومی: گاهی اوقات درایه‌های ماتریس A را می‌توان با ضابطه یا ضابطه‌هایی مشخص کرد که به آن درایه عمومی ماتریس A می‌گویند. در این صورت ماتریس A را به صورت $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ نمایش می‌دهیم. مثلاً در ماتریس $A_{3 \times 3} = [a_{ij}]$ اگر $j = i + 1$ باشد، برای به دست آوردن درایه‌های آن کافی است به جای درایه سطر i ام و ستون j ام مجموع شماره سطر و ستون آن درایه را قرار دهیم:

$$A = \begin{bmatrix} 1+1 & 1+2 & 1+3 \\ 2+1 & 2+2 & 2+3 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

توجه اگر تمام درایه‌های یک ماتریس از یک قانون تبعیت کنند می‌توان قانون درایه را در کروشه نیز قرار داد مثلاً در مثال بالا می‌توانیم بنویسیم $A = [i+j]_{3 \times 3}$.

(دی ۹۸)

؟ جای خالی را با عبارت مناسب پُر کنید.

در ماتریس $A = [a_{ij}]_{4 \times 3}$ که در آن $a_{ij} = \frac{2i}{j-1}$ باشد، درایه واقع در سطر سوم و ستون دوم ماتریس A برابر است.

✓ درایه سطر سوم و ستون دوم ماتریس A ، یعنی a_{32} ، پس باید در ضابطه a_{ij} به جای i عدد ۳ و به جای j عدد ۲ را قرار دهیم. بنابراین داریم:

$$a_{32} = \frac{2(3)}{2-1} = \frac{6}{1} = 6$$

توجه گاهی ضابطه درایه‌ها با هم فرق می‌کنند. در این صورت باید حواسمان باشد که برای هر درایه، ضابطه مربوط به آن را انتخاب کنیم.

؟ در ماتریس $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ که در آن $a_{ij} = \begin{cases} 2i-j & ; i > j \\ 2 & ; i = j \\ j-i & ; i < j \end{cases}$ باشد، مجموع درایه‌های ستون دوم کدام است؟

✓ درایه‌های ستون دوم a_{12} ، a_{22} و a_{32} هستند. در a_{12} ، $i < j$ ، در a_{22} ، $i = j$ و در a_{32} ، $i > j$ است. پس:

$$A = \begin{bmatrix} \bigcirc & a_{12} & \bigcirc \\ \bigcirc & a_{22} & \bigcirc \\ \bigcirc & a_{32} & \bigcirc \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} i < j \Rightarrow a_{ij} = j - i \Rightarrow a_{12} = 2 - 1 = 1 \\ i = j \Rightarrow a_{ij} = 2 \Rightarrow a_{22} = 2 \\ i > j \Rightarrow a_{ij} = 2i - j \Rightarrow a_{32} = 2(3) - 2 = 6 - 2 = 4 \end{cases}$$

بنابراین مجموع درایه‌های ستون دوم برابر $1 + 2 + 4 = 7$ است.

ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها

پرسش‌های تشریحی

درس
۱

● جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.

۱. هر عدد حقیقی واقع در هر ماتریس را آن ماتریس می‌نامیم.
۲. ماتریس A که دارای ۵ سطر و ۳ ستون است دارای درایه است.
۳. در ماتریس $A = [a_{ij}]_{3 \times 4}$ که در آن $a_{ij} = i^2 j - 3$ باشد، درایه واقع در سطر دوم و ستون چهارم برابر است.
۴. در ماتریس $B = [\frac{i+j}{p}]_{3 \times 4}$ ، درایه سطر دوم و ستون سوم برابر است.
۵. در ماتریس $C = [c_{ij}]_{3 \times 4}$ که در آن $c_{ij} = \begin{cases} i+j & ; i \geq j \\ j^2 - 1 & ; i < j \end{cases}$ باشد، درایه سطر اول و ستون دوم برابر است.
۶. مجموع درایه‌های ماتریس $A = [(-1)^{i+j} ij]_{2 \times 2}$ برابر است.

● درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

۷. ماتریسی که دارای سه سطر و پنج ستون باشد از مرتبه 5×3 است.
۸. ماتریسی که ۱۲ درایه دارد می‌تواند ۵ سطر داشته باشد.
۹. در ماتریس $A = [i^2 + j^2]_{2 \times 2}$ مجموع درایه‌ها برابر ۲۰ است.
۱۰. در ماتریس $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ و $a_{ij} = \begin{cases} i^2 + 1 & ; i = j \\ 2i + j & ; i > j \\ i - j & ; i < j \end{cases}$ ، مجموع درایه‌های سطر دوم و ستون سوم برابر ۱۶ است.
۱۱. اگر $[a_{ij}] = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $a_{12} \times (a_{23} + a_{21})$ را به دست آورید.

۱۲. ماتریس $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ با $a_{ij} = \begin{cases} \sqrt{2} & ; i = j \\ \frac{1}{j} & ; i < j \\ -1 & ; i > j \end{cases}$ را با درایه‌هایش مشخص کنید.

(کتاب راهنمای معلم)

فصل اول

درس اول: ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها (قسمت دوم)

هندسه دوازدهم

الف. معرفی چند ماتریس خاص

۱ ماتریس مربعی: اگر در ماتریس A ، تعداد سطرها با تعداد ستون‌ها برابر و مساوی n باشد، A را یک ماتریس مربعی $n \times n$ می‌نامیم. مثلاً ماتریس‌های زیر همگی مربعی هستند، زیرا تعداد سطرها و ستون‌های آن‌ها برابر است.

$$A = [5]_{1 \times 1} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & -2 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

نکته ۱ به ماتریس مربعی $n \times n$ ، به طور خلاصه ماتریس مرتبه n نیز می‌گویند. مثلاً وقتی در سؤالی می‌گویند ماتریس A از مرتبه ۴ است یعنی A یک ماتریس مربعی است که دارای ۴ سطر و ۴ ستون می‌باشد.

۲ ماتریس مربعی مرتبه ۱ یعنی $[k]_{1 \times 1}$ را مساوی عدد حقیقی k نیز تعریف می‌کنند. یعنی به جای این‌که بنویسند $A = [5]$ ، آن را به صورت $A = 5$ هم نمایش می‌دهند.

قطرهای اصلی و فرعی: در ماتریس مربعی A قطر اصلی و قطر فرعی را ببینید. درایه‌های روی قطر اصلی دارای شماره سطر و ستون برابر هستند اما اگر a_{ij} درایه روی قطر فرعی باشد، $i + j = n + 1$ می‌باشد. (مواست باشد n همون مرتبه ماتریسه)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

قطر اصلی قطر فرعی

$$\begin{bmatrix} i < j \\ i = j \\ i > j \end{bmatrix}$$

توجه در ماتریس‌های مربعی در درایه‌های بالای قطر اصلی $i < j$ و در درایه‌های پایین قطر اصلی $i > j$ می‌باشد. (در درایه‌های روی قطر اصلی هم که $i = j$ بود.)

؟ در ماتریس $A = [2i - j]_{3 \times 3}$ مجموع درایه‌های قطر اصلی را به دست آورید.

✓ درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس مربعی A ، درایه‌های a_{11} ، a_{22} و a_{33} هستند پس:

$$\begin{cases} a_{11} = 2(1) - 1 = 2 - 1 = 1 \\ a_{22} = 2(2) - 2 = 4 - 2 = 2 \Rightarrow a_{11} + a_{22} + a_{33} = 1 + 2 + 3 = 6 \\ a_{33} = 2(3) - 3 = 6 - 3 = 3 \end{cases}$$

۲ ماتریس سطری: اگر ماتریس A فقط دارای یک سطر باشد آن را یک ماتریس سطری می‌نامیم. مرتبه ماتریس‌های سطری به صورت $1 \times n$ است. مثلاً ماتریس‌های زیر همگی ماتریس‌های سطری هستند.

$$A = [1 \ 2 \ 5]_{1 \times 3} \quad B = [2 \ 3]_{1 \times 2} \quad C = [5]_{1 \times 1} = 5$$

مواست باشد در ماتریس سطری موم اینه که فقط یک سطر داشته باشیم و تعداد ستون‌ها موم نیست، متی می‌تونه یک ستون هم داشته باشه!

؟ ماتریس سطری $A = [a_{ij}]$ دارای ۵ درایه است. اگر $a_{ij} = i + j$ باشد، ماتریس A را با درایه‌های مشخص کنید.

✓ ماتریس سطری دارای یک سطر است. چون ماتریس A دارای ۵ درایه است پس مرتبه آن 1×5 می‌باشد. حال داریم:

$$A = [1+1 \ 1+2 \ 1+3 \ 1+4 \ 1+5] \Rightarrow A = [2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6]$$

۳ ماتریس ستونی: اگر ماتریس A فقط دارای یک ستون باشد، آن را یک ماتریس ستونی می‌نامیم. مرتبه ماتریس‌های ستونی $m \times 1$ است. مثلاً ماتریس‌های زیر همگی ستونی هستند.

$$A = \begin{bmatrix} 3 \\ \pi \\ 4 \end{bmatrix}_{3 \times 1} \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}_{2 \times 1} \quad C = [12]_{1 \times 1} = 12$$

ماتریس ستونی هم مثل ماتریس سطریه، فقط باید یک ستون داشته باشد. تکرار سطرها هم مهم نیست.

۴ ماتریس قطری: ماتریسی مربعی است که تمام درایه‌های غیرواقعه برقطر اصلی آن صفر باشند. دقت کنید درایه‌های واقعه برقطر اصلی می‌توانند صفر باشند یا نباشند. مثلاً ماتریس‌های زیر همگی قطری‌اند.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

؟ جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

(شهریور ۱۴۰۰)

۱ ماتریس مربعی که همه درایه‌های غیرواقعه برقطر اصلی آن صفر باشند را ماتریس گویند.

(شهریور ۹۹)

۲ در ماتریس قطری $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ m-1 & 4 \end{bmatrix}$ مقدار m برابر است.

۱ قطری

$$m - 1 = 0 \Rightarrow m = 1$$

۲ در ماتریس قطری درایه‌های غیرواقعه برقطر اصلی صفر هستند، پس:

؟ ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & m-3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ n+2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ یک ماتریس قطری است. مقدار m+n را به دست آورید.

چون A یک ماتریس قطری است پس درایه‌های غیرواقعه برقطر اصلی آن باید صفر باشند. بنابراین داریم:

$$\begin{cases} m - 3 = 0 \Rightarrow m = 3 \\ n + 2 = 0 \Rightarrow n = -2 \end{cases} \Rightarrow m + n = 3 + (-2) = 1$$

۵ ماتریس اسکالر: اگر در یک ماتریس قطری تمام درایه‌های روی قطر اصلی آن با هم برابر باشند، آن را یک ماتریس اسکالر می‌نامیم. مثلاً ماتریس‌های زیر همگی اسکالر هستند.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad C = [2]$$

(دی ۹۸)

؟ درستی و نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

«هر ماتریس اسکالر یک ماتریس قطری است.»

درست

۶ ماتریس واحد یا همانی: اگر در ماتریس اسکالر، تمام درایه‌های روی قطر اصلی ۱ باشد، ماتریس را ماتریس واحد یا همانی می‌نامیم. ماتریس همانی از مرتبه n را با I_n نمایش می‌دهیم.

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

توجه: ماتریس اسکالر $\begin{bmatrix} K & 0 & \dots & 0 \\ 0 & K & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & K \end{bmatrix}_{n \times n}$ را با KI_n نشان می‌دهیم. مثلاً ماتریس $4I_3$ به صورت $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ می‌باشد.

۷ ماتریس صفر: ماتریسی است که همه درایه‌های آن صفر باشند. ماتریس صفر را با \bar{O} نشان می‌دهیم. (ماتریس صفر، تنها مربعی نیست و می‌تونه از هر مرتبه‌ای باشه.)

$$\bar{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \bar{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \bar{O} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

■ **تساوی دو ماتریس:** دو ماتریس هنگامی مساوی اند که اولاً هم مرتبه باشند، ثانیاً درایه‌های نظیر آن‌ها مساوی باشند. (درایه‌های نظیر، درایه‌هایی هستند که

شماره سطر و ستون آن‌ها در دو ماتریس برابر باشد.) در دو ماتریس زیر درایه‌های نظیر با رنگ‌های یکسان مشخص شده‌اند:

$$A = \begin{bmatrix} \text{green} & \text{orange} & \text{light blue} \\ \text{pink} & \text{yellow} & \text{brown} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \text{green} & \text{orange} & \text{light blue} \\ \text{pink} & \text{yellow} & \text{brown} \end{bmatrix}$$

(شهریور ۹۹)

؟ اگر دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} x-1 & 8 \\ 3 & z+1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} y+1 & x-2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ مساوی باشند، مقدار $x+y+z$ را بیابید.

✓ باید درایه‌های نظیر ماتریس‌های A و B برابر باشند:

$$\begin{cases} y+1 = x-1 \\ x-2 = 8 \Rightarrow x=10 \\ 3 = 3 \\ 4 = z+1 \Rightarrow z=3 \end{cases} \xrightarrow{x=10} y+1=9 \Rightarrow y=8 \Rightarrow x+y+z=10+8+3=21$$

ب. اعمال روی ماتریس‌ها

■ **جمع و تفریق ماتریس‌ها:** دو ماتریس هم مرتبه را می‌توان با هم جمع یا از هم کم کرد. برای جمع یا تفاضل دو ماتریس هم مرتبه A و B ، کافی است

درایه‌های دو ماتریس را نظیر به نظیر با هم جمع یا از هم کم کنیم. حاصل مجموع یا تفاضل A و B ماتریسی مانند C است که از همان مرتبه A و B می‌باشد.

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}, B = [b_{ij}]_{m \times n} \Rightarrow A \pm B = [a_{ij} \pm b_{ij}] = [a_{ij} \pm b_{ij}]_{m \times n}$$

(شهریور ۱۴۰۰)

؟ دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. آیا جمع دو ماتریس A و B تعریف می‌شود؟ چرا؟

✓ خیر. چون دو ماتریس A و B هم مرتبه نیستند. ماتریس A از مرتبه 3×2 و ماتریس B از مرتبه 2×3 است.

؟ دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & m-3 \\ 0 & 1 & 0 \\ n+2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ m & 0 & 2 \\ 3 & -1 & n-1 \end{bmatrix}$ مفروض‌اند. اگر A یک ماتریس قطری باشد، حاصل $A+B$ را محاسبه کنید.

✓ چون A ماتریس قطری است، پس درایه‌های غیر واقع بر قطر اصلی آن همگی صفرند:

$$\begin{cases} m-3=0 \\ n+2=0 \end{cases} \Rightarrow m=3, n=-2$$

بنابراین ماتریس‌های A و B به صورت زیر هستند و حاصل $A+B$ برابر است با:

$$A+B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+2 & 0+(-1) & 0+1 \\ 0+3 & 1+0 & 0+2 \\ 0+3 & 0+(-1) & 4+(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

■ **ضرب عدد در ماتریس:** برای ضرب یک عدد حقیقی در ماتریس، آن عدد را در تمام درایه‌های ماتریس ضرب می‌کنیم. به بیان دیگر اگر A یک ماتریس $m \times n$

و Γ یک عدد حقیقی باشد، داریم:

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} \Rightarrow \Gamma A = [\Gamma a_{ij}]_{m \times n}$$

مثلاً اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس $3A$ برابر $\begin{bmatrix} 3 & 12 \\ 6 & 21 \end{bmatrix}$ است.

؟ اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ باشند، حاصل $2A - 3B$ را به دست آورید.

✓

$$2A - 3B = 2 \times \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - 3 \times \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-(-3) & 2-0 \\ 6-6 & 8-(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 0 & 11 \end{bmatrix}$$

■ **قرینه یک ماتریس:** قرینه ماتریس A را با $-A$ نمایش داده و از ضرب عدد (-1) در ماتریس A به دست می‌آید. واضح است که مجموع هر ماتریس با

قرینه‌اش برابر ماتریس صفر است.

$$A + (-A) = \bar{O}$$

اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ ، ماتریس B را به گونه‌ای معلوم کنید که $A + B = \bar{O}$ باشد.

$$B = -A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -2 & -1 & -5 \end{bmatrix}$$

چون $A + B = \bar{O}$ است، پس B قرینه ماتریس A می‌باشد. بنابراین داریم:

خواص جمع ماتریس‌ها و ضرب عدد در ماتریس: اگر A, B, C سه ماتریس هم‌مرتبه باشند، داریم:

$$A + B = B + A$$

۱ جمع ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی دارد.

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

۲ جمع ماتریس‌ها خاصیت شرکت‌پذیری دارد.

$$A + \bar{O} = \bar{O} + A = A$$

۳ ماتریس صفر، عضو خنثی عمل جمع است.

$$r(A \pm B) = rA \pm rB$$

۴ اگر r یک عدد حقیقی باشد، داریم:

اثبات

با توجه به تعریف جمع ماتریس‌ها و ضرب عدد در ماتریس داریم:

از آن جایی که ضرب نسبت به جمع در مجموعه اعداد حقیقی توزیع پذیر است داریم:

$$[r(a_{ij} \pm b_{ij})] = [ra_{ij} \pm rb_{ij}] = [ra_{ij}] \pm [rb_{ij}] = rA \pm rB$$

$$(r \pm s)A = rA \pm sA$$

۵ اگر r و s اعداد حقیقی باشند، داریم:

اثبات

با توجه به تعریف ضرب عدد در ماتریس داریم:

$$(r \pm s)A = (r \pm s)[a_{ij}] = [(r \pm s)a_{ij}] = [ra_{ij} \pm sa_{ij}] = [ra_{ij}] \pm [sa_{ij}] = rA \pm sA$$

$$A = B \Rightarrow rA = rB$$

۶ طرفین یک تساوی ماتریسی را می‌توان در یک عدد دلخواه ضرب کرد.

$$rA = rB, r \neq 0 \Rightarrow A = B$$

۷ طرفین یک تساوی ماتریسی را می‌توان بر یک عدد دلخواه مخالف صفر تقسیم کرد.

(خرداد ۱۴۰۰)

درستی و نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

«اگر A و B دو ماتریس هم‌مرتبه و r یک عدد حقیقی دلخواه و مخالف صفر باشد و $rA = rB$ آن‌گاه داریم $A = B$ »

با توجه به ویژگی‌های گفته شده عبارت فوق درست است.

اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ و هم‌چنین $r = 3$ و $s = 2$ باشند، درستی تساوی‌های زیر را نشان دهید.

$$(A + C) + B = A + (C + B) \quad 1$$

۱ یک بار $(A + C) + B$ و بار دیگر $A + (C + B)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$(A + C) + B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (A + C) + B = A + (C + B)$$

$$A + (C + B) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$$

$$(r + s)A = (3 + 2)A = 5A = 5 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -5 \\ 15 & 10 \end{bmatrix}$$

۲ یک بار $(r + s)A$ و بار دیگر $rA + sA$ را محاسبه می‌کنیم:

$$rA + sA = 3A + 2A = 3 \times \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + 2 \times \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 9 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -5 \\ 15 & 10 \end{bmatrix} \Rightarrow (r + s)A = rA + sA$$

● جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.

۲۵. در ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$ مجموع درایه‌های واقع بر قطر اصلی برابر است.
۲۶. اگر ماتریسی فقط دارای یک سطر باشد، به آن ماتریس می‌گوییم.
۲۷. اگر ماتریسی فقط دارای یک ستون باشد آن را ماتریس می‌نامیم. (دی خارج ۱۴۰۱)
۲۸. در ماتریس اسکالر درایه‌های واقع بر قطر اصلی هستند.
۲۹. ماتریس قطری که درایه‌های روی قطر اصلی آن با هم برابر باشند، ماتریس می‌نامیم. (دی ۹۷)
۳۰. در ماتریس قطری $A = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 2k-1 & 2 \end{bmatrix}$ مقدار k برابر است. (دی ۱۴۰۲)
۳۱. اگر دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2x-1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ مساوی باشند، آن‌گاه مقدار x برابر با است. (شهریور ۱۴۰۱)
۳۲. دو ماتریس را می‌توان با هم جمع کرد.
۳۳. جمع دو ماتریس خاصیت جابه‌جایی
۳۴. در ماتریس اسکالر $A = \begin{bmatrix} n+2 & 0 \\ m-1 & 4 \end{bmatrix}$ مقدار $m+n$ برابر است.
۳۵. اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} \frac{y-x}{x-2} & x^3-x \\ x^2+x & \frac{2}{x+1} \end{bmatrix}$ ، اسکالر باشد، مقدار $x+y$ برابر است.
۳۶. در ماتریس اسکالر درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی همگی هستند.
۳۷. اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} 4^{x-y} & 0 \\ x+y+z & 5^{x-4} \end{bmatrix}$ یک ماتریس همانی باشد، مقدار z برابر است.
۳۸. اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ باشند، مجموع درایه‌های $A+2B$ برابر است.
۳۹. اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} -2 & m \\ 0 & n \end{bmatrix}$ و $2A+B$ ماتریس همانی باشد، بزرگ‌ترین درایه ماتریس $A-2B$ برابر است.
۴۰. اگر $4 \begin{bmatrix} x+5 & 0 \\ 1 & y-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 4 & 12 \end{bmatrix}$ باشد، مقدار xy برابر است.

● درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

۴۱. تعداد درایه‌های ماتریس مربعی A می‌تواند برابر ۳۲ باشد.
۴۲. ماتریس صفریک ماتریس مربعی است.
۴۳. هر ماتریس صفر، ماتریس اسکالر نیز است.
۴۴. در ماتریس مربعی A درایه‌های واقع بر قطر فرعی دارای شماره سطر و ستون برابر هستند.
۴۵. در ماتریس مربعی A از مرتبه ۴ درایه a_{33} روی قطر فرعی قرار دارد.
۴۶. درایه‌های واقع بر قطر اصلی ماتریس قطری، غیرصفر هستند.
۴۷. ماتریس سطری نمی‌تواند مربعی باشد.
۴۸. ماتریس مربعی وجود دارد که ماتریس ستونی هم باشد.
۴۹. ماتریس مربعی که فقط درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی آن صفر باشند، ماتریس قطری است.

۵۰. هر ماتریس اسکالر، مربعی است.
۵۱. هر ماتریس قطری، اسکالر است.
۵۲. تعداد درایه‌های ماتریس صفر می‌تواند ۶ باشد.
۵۳. ماتریس $A = \begin{bmatrix} \circ & a+2b & \circ \\ \circ & a-3b & a+c \\ c-2 & \circ & a-b \end{bmatrix}$ به ازای هیچ مقدار حقیقی a ، b و c ماتریس قطری نمی‌شود.
۵۴. جمع ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی دارد.
۵۵. جمع ماتریس‌های هم‌مرتبه خاصیت شرکت‌پذیری دارد.
۵۶. طرفین یک تساوی ماتریسی را می‌توان بر یک عدد دلخواه تقسیم کرد.
۵۷. ماتریس اسکالر عضو خنثی عمل جمع است.
۵۸. ماتریس مربعی A از مرتبه $(\Delta - n) \times (3n - 7)$ است. ماتریس $B = [ni - 3j]_{2 \times 2}$ را با درایه‌هایش مشخص کنید.
۵۹. ماتریس مربعی $A = [a_{ij}]$ دارای ۹ درایه است. اگر $i > j$ ؛ $a_{ij} = 2i + j$ ؛ $i = j$ ؛ $a_{ij} = i - j$ ؛ $i < j$ باشد، ماتریس A را با درایه‌هایش مشخص کنید.
۶۰. در ماتریس $A = [i^2 - mj]_{3 \times 3}$ مجموع درایه‌های قطر اصلی برابر ۸ است. مقدار m را به دست آورید.
۶۱. اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & \circ & m-4 \\ \circ & 2 & \circ \\ \circ & n-3 & 4 \end{bmatrix}$ یک ماتریس قطری و $B = \begin{bmatrix} m-k & \circ & \circ \\ \circ & 3 & \circ \\ \circ & \circ & n \end{bmatrix}$ یک ماتریس اسکالر باشد، مقدار $m + n + k$ را به دست آورید.
۶۲. اگر $A = \begin{bmatrix} m & \circ \\ m-2 & n \end{bmatrix}$ ماتریسی اسکالر باشد، مقادیر m و n را بیابید.
۶۳. اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} 3a & c-1 \\ a+b & -6 \end{bmatrix}$ ماتریس اسکالر باشد، مقدار $a(b+c)$ را به دست آورید.
۶۴. اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} a-2 & c-b \\ d+a & b+2 \end{bmatrix}$ ماتریس واحد باشد، مقدار $a+b+c+d$ را به دست آورید.
۶۵. اگر ماتریس $\begin{bmatrix} x+1 & x^2-x-2 \\ x^2+x & 2x+1 \end{bmatrix}$ قطری باشد، مجموع درایه‌های ماتریس A را به دست آورید.
۶۶. اگر $A = \begin{bmatrix} 2x & 5 \\ z & 1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 3 & 2x+y \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ و $A = B$ در این صورت $x + 2y + 3z$ را به دست آورید.
۶۷. اگر $A = \begin{bmatrix} x^2-y^2 & 2 \\ \circ & -1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -7 & 2 \\ \circ & x+y \end{bmatrix}$ و $A = B$ ، در این صورت حاصل $x^2 + y^2$ را بیابید.
۶۸. اگر $A = \begin{bmatrix} 2x-y & 5 \\ z & 4 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 & 2x+y \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ و $A = B$ باشند، حاصل $x^2 - 2y + z$ را به دست آورید.
۶۹. اگر ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} x+2y & 3 \\ x & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ t & 3x-y \end{bmatrix}$ برابر باشند، مقدار $y + t$ را به دست آورید.
۷۰. ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} ab & 4 \\ 3 & a+b \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ با هم برابرند. مقدار $a^2 + b^2$ را به دست آورید.
۷۱. اگر ماتریس‌های $A = [3i - j^2]$ و $B = \begin{bmatrix} b-2 & a+1 \\ c+1 & 2 \end{bmatrix}$ مساوی باشند، مقدار $a + b + c$ را به دست آورید.
۷۲. ماتریس $\begin{bmatrix} x+5 & y+2 \\ 2x-8 & 3z \end{bmatrix}$ با ماتریس حاصل از ضرب عدد حقیقی m در ماتریس همانی برابر است. حاصل $\frac{m+x}{z+y}$ را به دست آورید.

(دی خارج ۱۴۰۰)

(دی ۱۴۰۱)

(دی ۱۴۰۰ - شهریور ۹۸)

(دی خارج ۱۴۰۱)

(دی ۱۴۰۲)

(کتاب راهنمای معلم)

- ۷۳.** اگر $A = [(-1)^{ij} i^2 j]_{2 \times 2}$ باشد، قرینه ماتریس A را با درایه‌هایش مشخص کنید.
- ۷۴.** مرتبه ماتریس‌های A ، B و $A - B$ به ترتیب $3 \times (a+1)$ ، $4 \times (b-1)$ و $c \times d$ است. مقدار $a + b + c + d$ را به دست آورید.
- ۷۵.** ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} x+1 & y+2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. اگر $A + B = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$ باشد. آن‌گاه مقادیر x و y را به دست آورید. (خرداد ۱۴۰۲)
- ۷۶.** اگر $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ به صورت $A = \begin{cases} ij & ; i > j \\ i^2 & ; i = j \\ 2i - j & ; i < j \end{cases}$ تعریف شده باشد، ماتریس $2A - 3I$ را به دست آورید. (دی ۹۷)
- ۷۷.** اگر A یک ماتریس مربعی، $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -18 & 13 \end{bmatrix}$ و $A^2 = 6A - 11I$ باشد، ماتریس A را به دست آورید. (دی خارج ۱۴۰۱)
- ۷۸.** ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} -1 & m \\ -2 & m \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ چنان هستند که $C = 3A + 2B$ ماتریس قطری است. مقدار m و مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس C را حساب کنید. (خرداد ۱۴۰۳)
- ۷۹.** ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & m \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -9 \end{bmatrix}$ مفروض‌اند. اگر $2C + A = 3I + B$ و مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس C برابر -4 باشد، ماتریس $A + 2B - C$ را با درایه‌هایش بنویسید.
- ۸۰.** اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & m+1 \\ 2n+4 & 5 \end{bmatrix}$ یک ماتریس قطری باشد، با محاسبه m و n ، ماتریس $A + I$ را بیابید (I ماتریس همانی مرتبه دو است). (شهریور ۱۴۰۱)
- ۸۱.** ماتریس اسکالر $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ با $a_{33} + a_{44} = -2$ و $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس $A - 3B$ را به دست آورید.
- ۸۲.** ماتریس $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ با $a_{ij} = \begin{cases} 2i - 3 & ; i \geq j \\ i + j & ; i < j \end{cases}$ و ماتریس B یک ماتریس اسکالر که مجموع درایه‌های آن برابر ۱۲ است مفروض‌اند. اگر جمع دو ماتریس قابل تعریف باشد، ماتریس $2A - B$ را به دست آورید.
- ۸۳.** اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ دو ماتریس باشند، ماتریس $2A - 3B$ را با درایه‌هایش مشخص کنید.
- ۸۴.** ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ -1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ مفروض‌اند. اگر $A + C = \bar{O}$ باشد، ماتریس $2B + 3C$ را به دست آورید.
- ۸۵.** اگر $A = [a_{ij}]$ که $a_{ij} = \begin{cases} i^2 - j & ; i \geq j \\ 2i - j & ; i < j \end{cases}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ 5 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ دو ماتریس باشند، ماتریس $2A - 3B + 2I$ را به دست آورید.
- ۸۶.** مجموع ماتریس‌های $A = [i - xj]_{y \times x}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & x+y \\ -1 & 3 \\ x^2 - y^2 & 2-x \end{bmatrix}$ تعریف می‌شود. ماتریس $2A - 3B$ را با درایه‌هایش بنویسید.
- ۸۷.** اگر $A + 3B = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}$ و $A - B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل ضرب درایه‌های قطر اصلی ماتریس A را به دست آورید.
- ۸۸.** اگر A و B دو ماتریس و r یک عدد حقیقی باشد، ثابت کنید $r(A \pm B) = rA \pm rB$.
- ۸۹.** اگر A یک ماتریس و r و s اعداد حقیقی باشند ثابت کنید $(r \pm s)A = rA \pm sA$.

۲
بخش



پاسخنامه

ماتریس و کاربردها

فصل ۱

۱

درایه

۲

$$5 \times 3 = 15$$

۳

در درایه سطر دوم و ستون چهارم، $i=2$ و $j=4$ است پس:

$$a_{ij} = i^2 j - 3 \Rightarrow a_{24} = 2^2 \times 4 - 3 = 13$$

۴

در درایه سطر دوم و ستون سوم، $i=2$ و $j=3$ است پس:

$$a_{ij} = \frac{i+j}{2j} \Rightarrow a_{23} = \frac{2+3}{2 \times 3} = \frac{5}{6}$$

۵

در درایه سطر اول و ستون دوم، $i=1$ و $j=2$ است. چون $i < j$ می باشد،

$$\text{از قانون } 1 - j^2 \text{ استفاده می کنیم: } a_{12} = 2^2 - 1 = 3$$

۶

$$A = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1} \times 1 \times 1 & (-1)^{1+2} \times 1 \times 2 \\ (-1)^{2+1} \times 2 \times 1 & (-1)^{2+2} \times 2 \times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع درایه ها} = 1$$

۷

نادرست.

در معرفی مرتبه ماتریس در سمت چپ تعداد سطرها و در سمت راست تعداد ستون ها را اعلام می کنیم، بنابراین مرتبه ماتریس 5×3 است.

۸

نادرست.

اگر تعداد ستون ها را m فرض کنیم، باید $5 \times m$ برابر ۱۲ شود. در این صورت مقدار طبیعی برای m به دست نمی آید. (هواست هست که تعداد ستون ها باید یه عدد طبیعی باشه.)

۹

درست

ماتریس A را با درایه های مشخص می کنیم:

$$A = \begin{bmatrix} 1^2 + 1^2 & 1^2 + 2^2 \\ 2^2 + 1^2 & 2^2 + 2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه ها برابر $2 + 5 + 5 + 8 = 20$ است.

۱۰

درست

درایه های سطر دوم و ستون سوم را معلوم می کنیم:

$$\begin{cases} a_{21} = 2(2) + 1 = 4 + 1 = 5 \\ a_{22} = 2^2 + 1 = 4 + 1 = 5 \Rightarrow \text{مجموع} = 5 + 5 + (-1) = 9 \\ a_{23} = 2 - 3 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{13} = 1 - 3 = -2 \\ a_{23} = 2 - 3 = -1 \Rightarrow \text{مجموع} = (-2) + (-1) + 10 = 7 \\ a_{33} = 3^2 + 1 = 9 + 1 = 10 \end{cases}$$

بنابراین مجموع درایه های سطر دوم و ستون سوم برابر $9 + 7 = 16$ است.

۱۱

a_{12} درایه سطر ۱ و ستون ۲ است که برابر ۳ می باشد. a_{23} درایه سطر ۲ و ستون ۳ می باشد که برابر ۴ و a_{21} درایه سطر ۲ و ستون ۱ می باشد که برابر ۲ است، پس:

$$a_{12} \times (a_{23} + a_{21}) = -3 \times (4 + 2) = -3 \times 6 = -18$$

۱۲

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & \sqrt{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & -1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

۱۳

مجموع درایه های a_{12} ، a_{22} و a_{32} را می خواهیم:

$$\begin{cases} a_{12} = 1 + 2 = 3 \\ a_{22} = 2 + 2 = 4 \Rightarrow a_{12} + a_{22} + a_{32} = 3 + 4 + (-1) = 6 \\ a_{32} = 3 - 4 = -1 \end{cases}$$

۱۴

درایه های ستون دوم A همان a_{12} ، a_{22} و a_{32} هستند، پس:

$$i < j \Rightarrow a_{ij} = i - \frac{j}{2} \Rightarrow a_{12} = 1 - \frac{2}{2} = 1 - 1 = 0$$

$$i = j \Rightarrow a_{ij} = i^2 - j^i \Rightarrow a_{22} = 2^2 - 2^2 = 4 - 4 = 0$$

$$i > j \Rightarrow a_{ij} = i^2 - j^i \Rightarrow a_{32} = 3^2 - 2^3 = 9 - 8 = 1$$

بنابراین مجموع درایه های ستون دوم برابر $0 + 0 + 1 = 1$ است.

۱۵

با توجه به ضابطه a_{ij} داریم:

$$i = j \Rightarrow a_{ij} = 2 \Rightarrow a_{33} = 2$$

$$i > j \Rightarrow a_{ij} = i + j \Rightarrow a_{31} = 3 + 1 = 4$$

$$i < j \Rightarrow a_{ij} = i - j \Rightarrow a_{12} = 1 - 2 = -1$$

۱۶

با توجه به ضابطه a_{ij} داریم:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1^2 & 1^3 & 1^4 \\ 2 & -3 & 2^3 & 2^4 \\ 2 & 2 & -3 & 3^4 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 8 & 16 \\ 2 & 2 & -3 & 81 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

۱۷

$$A = \begin{bmatrix} 1+1 & 0 & 0 \\ 1 & 2+2 & 0 \\ 1 & 2 & 3+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

۱۸

برای نوشتن ماتریس A با درایه هایش باید توجه داشته باشیم که صفر

عددی زوج است.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ -3 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

۱۹

$$A = \begin{bmatrix} 2-1 & 2 & 1+3 & 2-4 \\ 2 & 2+2 & 2-3 & 2 \\ 3+1 & 2-2 & 2 & 3+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & -2 \\ 2 & 4 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

۳۰

$$\frac{1}{2}$$

در ماتریس قطری درایه‌های غیرواقعه بر قطر اصلی صفر هستند، پس:

$$2k - 1 = 0 \Rightarrow k = \frac{1}{2}$$

۳۱

۳

$$2x - 1 = 5 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3$$

۳۲

هم مرتبه

۳۳

دارد.

۳۴

۳

در ماتریس اسکالر درایه‌های روی قطر اصلی برابر و درایه‌های غیرواقعه بر قطر اصلی صفر هستند، پس:

$$\begin{cases} n + 2 = 4 \Rightarrow n = 2 \\ m - 1 = 0 \Rightarrow m = 1 \end{cases} \Rightarrow m + n = 1 + 2 = 3$$

۳۵

-۴

در ماتریس اسکالر درایه‌های غیرواقعه بر قطر اصلی صفر هستند، پس:

$$x^3 - x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases} \end{cases}$$

$$x^2 + x = 0 \Rightarrow x(x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}$$

بنابراین x می‌تواند صفر یا -1 باشد. از آن جایی که درایه $\frac{2}{x+1}$ به ازای

$x = -1$ تعریف نمی‌شود، پس فقط $x = 0$ قابل قبول است. بنابراین داریم:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{y}{-2} & 0 \\ 0 & \frac{y}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{A \text{ اسکالر است.}} \frac{y}{-2} = 2 \Rightarrow y = -4$$

پس $x + y$ برابر -4 می‌باشد.

۳۶

صفر

۳۷

-۸

ماتریس همانی، ماتریس $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ می‌باشد، پس:

$$\begin{cases} 4^{x-y} = 1 \Rightarrow 4^{x-y} = 4^0 \Rightarrow x - y = 0 \\ 5^{x-4} = 1 \Rightarrow 5^{x-4} = 5^0 \Rightarrow x - 4 = 0 \\ x + y + z = 0 \Rightarrow 4 + 4 + z = 0 \Rightarrow z = -8 \end{cases} \Rightarrow x = 4, y = 4$$

۳۸

۱۴

ماتریس $A + 2B$ را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} A + 2B &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + 2 \times \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -4 & 10 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -5 & 10 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{مجموع درایه‌ها} = 5 + 4 + (-5) + 10 = 14 \end{aligned}$$

۲۰

$$A = \begin{bmatrix} 3-2 & 3-4 & 3-6 \\ 6-2 & 6-4 & 6-6 \\ 9-2 & 9-4 & 9-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 4 & 2 & 0 \\ 7 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

۲۱

$$B = \begin{bmatrix} 1+1 & 2-2 & 3-2 \\ 1 & 2+1 & 3-2 \\ 1 & 1 & 3+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

۲۲

$$A = \begin{bmatrix} 1^2 - 2 \times 1 \times 1 & 1^2 - 2 \times 1 \times 2 & 1^2 - 2 \times 1 \times 3 & 1^2 - 2 \times 1 \times 4 \\ 2^2 - 2 \times 2 \times 1 & 2^2 - 2 \times 2 \times 2 & 2^2 - 2 \times 2 \times 3 & 2^2 - 2 \times 2 \times 4 \\ 3^2 - 2 \times 3 \times 1 & 3^2 - 2 \times 3 \times 2 & 3^2 - 2 \times 3 \times 3 & 3^2 - 2 \times 3 \times 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -3 & -5 & -7 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 3 & -3 & -9 & -15 \end{bmatrix}$$

۲۳

ابتدا ماتریس‌های A و B را مشخص می‌کنیم:

$$A = [1-1 \quad 1-2 \quad 1-3] = [0 \quad -1 \quad -2]$$

$$B = \begin{bmatrix} 1^1 - 1 & 1^2 - 2 & 1^3 - 3 \\ 2^1 - 1 & 2^2 - 2 & 2^3 - 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

حال ماتریس C به صورت زیر است:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

۲۴

ابتدا ماتریس‌های A و B را با درایه‌هایش می‌نویسیم:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2^2 - 1 \\ 1^2 - 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1^2 + 1 & 1^2 + 2 \\ 2^2 + 1 & 2^2 + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

حال ماتریس C به صورت زیر است:

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

۲۵

۹

درایه‌های قطر اصلی 1 و 8 هستند، پس $1 + 8 = 9$ می‌باشد.

۲۶

سطری

۲۷

ستونی

۲۸

برابر

۲۹

اسکالر

۳۹

۲۱

ابتدا m و n را معلوم می‌کنیم:

$$3A + B = I \Rightarrow 3 \times \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & m \\ 0 & n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & m \\ 0 & n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & m+9 \\ 0 & n+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} m+9=0 \Rightarrow m=-9 \\ n+6=1 \Rightarrow n=-5 \end{cases}$$

حال ماتریس $A - 2B$ را به دست می‌آوریم:

$$A - 2B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - 2 \times \begin{bmatrix} -2 & -9 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 & -18 \\ 0 & -10 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 21 \\ 0 & 12 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{بزرگ‌ترین درایه} = 21$$

۴۰

-۱۶

$$4 \begin{bmatrix} x+5 & 0 \\ 1 & y-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 4 & 12 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4(x+5) & 0 \\ 4 & 4(y-1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 4 & 12 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4(x+5) = 4 \Rightarrow x+5=1 \Rightarrow x=-4 \\ 4(y-1) = 12 \Rightarrow y-1=3 \Rightarrow y=4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow xy = (-4) \times 4 = -16$$

۴۱

نادرست. تعداد درایه‌های مربعی A از مرتبه n برابر n^2 است که عددی مربع کامل می‌باشد، در حالی که 32 مربع کامل نیست.

۴۲

نادرست

در ماتریس صفر تمام درایه‌ها صفر است اما مرتبه ماتریس می‌تواند هر چیزی باشد.

۴۳

نادرست. ماتریس‌های اسکالر، مربعی هستند ولی ماتریس صفر ممکن است مربعی نباشد.

۴۴

نادرست

درایه‌های واقع بر قطر اصلی این‌گونه‌اند.

۴۵

درست. اگر در ماتریس مربعی مرتبه n ، $i + j = n + 1$ باشد a_{ij} روی قطر فرعی قرار دارد.

۴۶

نادرست

درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس قطری نیز می‌توانند صفر باشند، مثلاً

$$\text{ماتریس} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ یک ماتریس قطری است.}$$

۴۷

نادرست. ماتریس مربعی مرتبه ۱ ماتریس سطری نیز هست.

۴۸

درست. ماتریس مربعی از مرتبه ۱، ماتریس ستونی هم هست زیرا فقط یک ستون دارد.

۴۹

نادرست. در ماتریس قطری علاوه بر درایه‌های غیر واقع بر قطر اصلی، درایه‌های واقع بر قطر اصلی نیز می‌توانند صفر باشند.

۵۰

درست

ماتریس‌های اسکالر نوعی از ماتریس‌های مربعی هستند.

۵۱

نادرست

هر ماتریس قطری لزوماً اسکالر نیست، مثلاً ماتریس $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ قطری است اما اسکالر نیست.

۵۲

درست. مثلاً ماتریس صفر از مرتبه 3×2 باشد تعداد درایه‌های آن برابر ۶ است.

۵۳

نادرست

در ماتریس قطری درایه‌های غیر واقع بر قطر اصلی صفر هستند، پس:

$$\begin{cases} a + 2b = 0 \\ a + c = 0 \\ c - 2 = 0 \Rightarrow c = 2 \end{cases}$$

حال داریم:

$$a + c = 0 \xrightarrow{c=2} a = -2$$

$$a + 2b = 0 \xrightarrow{a=-2} -2 + 2b = 0 \Rightarrow b = 1$$

توجه کنید در ماتریس قطری مهم نیست که درایه‌های روی قطر اصلی صفر باشند یا نباشند.

۵۴

درست

۵۵

درست

۵۶

نادرست

طرفین تساوی ماتریسی را می‌توان بر یک عدد غیر صفر تقسیم کرد.

۵۷

نادرست

ماتریس صفر عضو خنثی عمل جمع است.

۵۸

چون ماتریس A مربعی است، پس:

$$3n - 7 = 5 - n \Rightarrow 4n = 12 \Rightarrow n = 3$$

حال ماتریس $B = [3i - 3j]_{2 \times 2}$ را با درایه‌هایش معلوم می‌کنیم:

$$B = \begin{bmatrix} 3(1) - 3(1) & 3(1) - 3(2) \\ 3(2) - 3(1) & 3(2) - 3(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

۶۴

در ماتریس واحد یا همانی درایه‌های روی قطر اصلی برابر ۱ و درایه‌های

$$\begin{cases} a - 2 = 1 \Rightarrow a = 3 \\ c - b = 0 \dots \xrightarrow{b=-1} c + 1 = 0 \Rightarrow c = -1 \\ d + a = 0 \dots \xrightarrow{a=3} d + 3 = 0 \Rightarrow d = -3 \\ b + 2 = 1 \Rightarrow b = -1 \end{cases}$$

بنابراین مقدار $a + b + c + d$ برابر $3 + (-1) + (-1) + (-3) = -2$ می‌باشد.

۶۵

در ماتریس قطری درایه‌های غیرواقعی بر قطر اصلی صفر است. پس:

$$\begin{cases} x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x+1)(x-2) = 0 \Rightarrow x = -1, x = 2 \\ x^2 + x = 0 \Rightarrow x(x+1) = 0 \Rightarrow x = 0, x = -1 \end{cases}$$

واضح است که فقط $x = -1$ می‌تواند هم‌زمان هر دو درایه را صفر کند. پس

ماتریس A به صورت زیر است:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{مجموع درایه‌ها} = -1$$

۶۶

ماتریس‌های A و B که هم‌مرتبه هستند. پس فقط باید درایه‌های نظیر به

نظیر آن‌ها مساوی باشند:

$$\begin{cases} 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \\ 2x + y = 5 \xrightarrow{2x=3} y = 2 \Rightarrow x + 2y + 3z = \frac{3}{2} + 2(2) + 3(-2) = -\frac{1}{2} \\ z = -2 \end{cases}$$

۶۷

باید $x^2 - y^2 = -7$ و $x + y = -1$ باشد، پس:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -7 \Rightarrow (x - y)(x + y) = -7 \\ x + y = -1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{x+y=-1} (x - y)(-1) = -7 \Rightarrow x - y = 7$$

حال داریم:

$$\begin{cases} x - y = 7 \\ x + y = -1 \end{cases} \xrightarrow{+} 2x = 6 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow y = -4$$

بنابراین $x^2 + y^2 = 9 + 16 = 25$ است.

۶۸

باید درایه‌های نظیر با هم برابر باشند:

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 2x + y = 5 \end{cases} \xrightarrow{+} 4x = 8 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = 1$$

بنابراین حاصل $x^2 - 2y + z$ برابر است با:

$$x^2 - 2y + z = 2^2 - 2(1) + (-3) = 4 - 2 - 3 = -1$$

۶۹

باید درایه‌های نظیر با هم برابر باشند، پس:

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 6y = 15 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$$

$$t = x \xrightarrow{x=1} t = 1$$

$$\Rightarrow 7y = 14 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow x = 1$$

بنابراین $y + t$ برابر $2 + 1 = 3$ است.

۵۹

می‌دانیم ماتریس‌های مربعی از مرتبه n در n هستند، پس:

$$n \times n = 9 \Rightarrow n = 3$$

بنابراین با توجه به ضابطه‌های a_{ij} و این‌که مرتبه ماتریس ۳ است، داریم:

$$A = \begin{bmatrix} 1-1 & 2-1 & 3-1 \\ 2(2)+1 & 2-2 & 3-2 \\ 2(3)+1 & 2(3)+2 & 3-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \\ 7 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

۶۰

درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس A را به دست می‌آوریم:

$$A = \begin{bmatrix} 1^2 - m \times 1 & \circ & \circ \\ \circ & 2^2 - m \times 2 & \circ \\ \circ & \circ & 3^2 - m \times 3 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1-m & \circ & \circ \\ \circ & 4-2m & \circ \\ \circ & \circ & 9-3m \end{bmatrix}$$

حال داریم:

$$1 - m + 4 - 2m + 9 - 3m = 8 \Rightarrow 14 - 6m = 8$$

$$\Rightarrow 6m = 6 \Rightarrow m = 1$$

۶۱

چون A ماتریس قطری است، درایه‌های غیرواقعی بر قطر اصلی آن صفر

هستند. پس:

$$\begin{cases} m - 4 = 0 \Rightarrow m = 4 \\ n - 3 = 0 \Rightarrow n = 3 \end{cases}$$

حال چون ماتریس B اسکالر است، پس:

$$\begin{cases} m - k = 3 \xrightarrow{m=4} 4 - k = 3 \Rightarrow k = 1 \\ n = 3 \end{cases}$$

بنابراین $m + n + k$ برابر $4 + 3 + 1 = 8$ است.

۶۲

در ماتریس اسکالر درایه‌های غیرواقعی بر قطر اصلی صفر هستند و هم‌چنین

درایه‌های روی قطر اصلی با هم برابرند، پس:

$$A = \begin{bmatrix} m & \circ \\ m-2 & n \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} m-2=0 \Rightarrow m=2 \\ m=n \xrightarrow{m=2} n=2 \end{cases}$$

۶۳

در ماتریس اسکالر درایه‌های غیرواقعی بر قطر اصلی صفر و درایه‌های روی

قطر اصلی برابر هستند. پس:

$$\begin{cases} 3a = -6 \Rightarrow a = -2 \\ c - 1 = 0 \Rightarrow c = 1 \\ a + b = 0 \xrightarrow{a=-2} -2 + b = 0 \Rightarrow b = 2 \end{cases}$$

بنابراین $a(b+c)$ برابر $-2 \times (2+1) = -6$ است.

فرمول بیس

در این کتابچه،
«تمرین‌های» کتاب درسی
را به طور کامل پاسخ
داده‌ایم.
از آن جایی که تقریباً
بیش از نیمی از سؤالات
امتحانات نهایی مشابه
تمرینات کتاب درسی
طراحی می‌شوند مرور
مطالب این کتابچه در
شب امتحان به شما کمک
می‌کند تا با آمادگی کامل
سر جلسه امتحان
حاضر شوید.

تهران، میدان انقلاب
نبش بازارچه کتاب

www.gajmarket.com

فهرست

ماتریس و کاربردها

۳

فصل اول

آشنایی با مقاطع مخروطی

۱۸

فصل دوم

بردارها

۳۸

فصل سوم

فصل

ماتریس و کاربردها

درس ۱ | ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها

کاردرکلاس | ص ۱۱ کتاب درسی

اطلاعات مربوط به ۴ فروشگاه A، B، C و D در مورد تعداد شلوار، بلوز و پیراهن‌های موجود در هر فروشگاه، در جدول دوبعدی زیر آمده است. این اطلاعات را یک بار با یک ماتریس 3×4 و یک بار با ماتریسی 4×3 نمایش دهید.

فروشگاه A	۲۴ شلوار، ۱۵ بلوز و ۷ پیراهن
فروشگاه B	۲۶ شلوار، ۱۹ بلوز و ۱۱ پیراهن
فروشگاه C	۱۷ شلوار، ۲۸ بلوز و ۲۲ پیراهن
فروشگاه D	۱۲ شلوار، ۳۱ بلوز و ۳۵ پیراهن

پیراهن بلوز شلوار

$$M_{3 \times 4} = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C & D \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{شلوار} \\ \text{بلوز} \\ \text{پیراهن} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 24 & 26 & 17 & 12 \\ 15 & 19 & 28 & 31 \\ 7 & 11 & 22 & 35 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$M_{4 \times 3} = \begin{matrix} \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \end{matrix} & \begin{bmatrix} 24 & 15 & 7 \\ 26 & 19 & 11 \\ 17 & 28 & 22 \\ 12 & 31 & 35 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

کاردرکلاس | ص ۱۴ کتاب درسی

مانند نمونه ماتریس‌های A و B را در هر حالت با هم جمع یا تفریق کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & 6 & -1 \\ 7 & 8 & 9 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A+B = \begin{bmatrix} 1+(-1) & 2+(-2) & 3+(-3) & (-1)+1 \\ 4+1 & 5+2 & 6+3 & (-1)+4 \\ 7+5 & 8+6 & 9+7 & (-1)+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 7 & 9 & 3 \\ 12 & 14 & 16 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\text{الف) } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A-B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ب) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 7 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A+B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 11 \end{bmatrix}$

پ) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ \sqrt{2} & 5 & -1 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & -7 \\ 1 & 2 & 3 & -9 \end{bmatrix} \Rightarrow A-B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 & 9 \\ \sqrt{2}-1 & 3 & -4 & 13 \end{bmatrix}$

ت) $A = \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -7 \end{bmatrix} \Rightarrow A+B = \begin{bmatrix} -2 \end{bmatrix}$

ث) دو ماتریس 3×3 و غیرصفر مثال بزنید که جمع آنها برابر با ماتریس صفر باشد.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & -4 \\ -5 & -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \bar{0}$$

کارد کلاسی | ص ۱۵ کتاب درسی

در هر حالت طرف دوم تساوی‌های زیر را به دست آورید.

الف) $-1 \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -4 & -5 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -4 & -5 & -6 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

ب) $\frac{1}{2} \times \begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 7 \\ \sqrt{2} & -1 & 2 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \frac{7}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 4 \end{bmatrix}$

پ) $0 \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & -4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \bar{0}$

ت) $7 \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \bar{0}$

۲ هر یک از ماتریس‌های زیر را به صورت ضرب یک عدد در یک ماتریس بنویسید.

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 4 & 2 \\ 10 & 3 & 1 \end{bmatrix} = 2 \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 5 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix} = (-1) \times \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & -4 \\ -2 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

کاردکلاس | ص ۱۷ کتاب درسی

۱] برای ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ و دو عدد حقیقی $r=3$ و $s=-2$ برقراری خاصیت $(r \pm s)A = rA \pm sA$ را تحقیق کنید.

$$\left. \begin{aligned} (3+(-2)) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \\ 3A + (-2)A &= \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \Rightarrow (r+s)A = rA + sA$$

$$\left. \begin{aligned} (3-(-2)) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ -5 & 15 \end{bmatrix} \\ 3A - (-2)A &= \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ -5 & 15 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \Rightarrow (r-s)A = rA - sA$$

۲] درستی خاصیت بالا را در حالت کلی ثابت کنید.

فرض کنیم $A = [a_{ij}]$ یک ماتریس $m \times n$ باشد و r و s دو عدد حقیقی باشند، آنگاه:

$$(r+s)A = (r+s)[a_{ij}] = [(r+s)a_{ij}] = [ra_{ij} + sa_{ij}] = r[a_{ij}] + s[a_{ij}] = rA + sA$$

کاردکلاس | ص ۱۷ کتاب درسی

یک ماتریس سطری 1×3 مانند A و یک ماتریس ستونی 3×1 مانند B طوری تعریف کنید که

$$A \times B = -7$$

$$A = [1 \ 2 \ 1], B = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} \Rightarrow A \times B = [1 \ 2 \ 1] \times \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} \\ = 1 \times (-1) + 2 \times (-2) + 1 \times (-2) = -7$$

کاردکلاس | ص ۱۸ و ۱۹ کتاب درسی

۱] برای هر حالت $A \times B$ و $B \times A$ را در صورت امکان محاسبه کنید.

$$\text{الف) } A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}_{3 \times 3}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 4} \Rightarrow A \times B = \begin{bmatrix} 14 & 6 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 5 & 2 & -5 \end{bmatrix}_{3 \times 4}$$

تعریف نمی‌شود. $B_{3 \times 4} \times A_{3 \times 3} \Rightarrow$

$$\text{ب) } A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}_{3 \times 2}, B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \Rightarrow A \times B = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -4 \\ 7 & -2 & 7 \\ 0 & -3 & -7 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

$$B \times A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 18 & -13 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

$$\text{پ) } A = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}_{3 \times 1}, B = [2 \ 3 \ 4]_{1 \times 3} \Rightarrow A \times B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & -4 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}_{3 \times 3}, B \times A = [7] = 7$$

$$\text{ت) } A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}_{2 \times 3}, B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \Rightarrow A \times B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 3} = \bar{0}$$

$B_{3 \times 3} \times A_{3 \times 3} \Rightarrow$ تعریف نمی‌شود.

قسمت (ت) را با این حکم در اعداد حقیقی، که «اگر $a \times b = 0$ آنگاه $a = 0$ یا $b = 0$ » مقایسه کنید. اگر حاصل ضرب دو عدد حقیقی مساوی صفر باشد، آنگاه حداقل یکی از آنها صفر است اما در ماتریس‌ها اگر حاصل ضرب دو ماتریس، صفر باشد، ممکن است که هیچ یک از ماتریس‌ها صفر نباشد. یعنی اگر $A \times B = \bar{0}$ آنگاه ممکن است $A \neq \bar{0}$ و $B \neq \bar{0}$.

۲ اگر A ماتریسی 3×5 باشد در این صورت در هر یک از حالت‌های زیر مشخص کنید که $A \times B$ و $B \times A$ قابل تعریف است یا خیر و در صورت تعریف مرتبه آن را بیابید:

الف) $B = [b_{ij}]_{3 \times 2}$

$A_{3 \times 5} \times B_{3 \times 2} \Rightarrow$ تعریف نمی‌شود.

$B_{3 \times 2} \times A_{3 \times 5} \Rightarrow$ تعریف نمی‌شود.

ب) $B = [b_{ij}]_{3 \times 5}$

$A_{3 \times 5} \times B_{3 \times 5} \Rightarrow$ تعریف نمی‌شود.

$B_{3 \times 5} \times A_{3 \times 5} \Rightarrow$ تعریف نمی‌شود.

پ) $B = [b_{ij}]_{5 \times 2}$

تعریف می‌شود و مرتبه ماتریس حاصل ضرب 3×3 است. $A_{3 \times 5} \times B_{5 \times 2} \Rightarrow$

تعریف می‌شود و مرتبه ماتریس حاصل ضرب 5×5 است. $B_{5 \times 2} \times A_{3 \times 5} \Rightarrow$

ت) $B = [b_{ij}]_{5 \times 4}$

تعریف می‌شود و مرتبه ماتریس حاصل ضرب 3×4 است. $A_{3 \times 5} \times B_{5 \times 4} \Rightarrow$

تعریف نمی‌شود. $B_{5 \times 4} \times A_{3 \times 5} \Rightarrow$

ث) $B = [b_{ij}]_{5 \times 5}$

تعریف می‌شود و مرتبه ماتریس حاصل ضرب 3×5 است. $A_{3 \times 5} \times B_{5 \times 5} \Rightarrow$

تعریف نمی‌شود. $B_{5 \times 5} \times A_{3 \times 5} \Rightarrow$

۱ فرض کنید $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ در این صورت حاصل $(A \times B)$ و $(B \times A)$ را با هم

مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \quad B \times A = \begin{bmatrix} 3 & -14 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

نتیجه می‌گیریم که $A \times B \neq B \times A$ و ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی ندارد.

۲ ماتریس اسکالر $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ را از چپ و راست در ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ضرب کرده و

حاصل ضرب‌ها را با هم مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

$$\left. \begin{aligned} A \times I &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \\ I \times A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \Rightarrow A \times I = I \times A = A$$

نتیجه می‌گیریم برای هر ماتریس مربعی A و ماتریس همانی هم‌مرتبه با A داریم:

$$A \times I = I \times A = A$$

۳ اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$ و $C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$ در این صورت درستی تساوی

$A \times (B+C) = (A \times B) + (A \times C)$ را بررسی کنید.

$$\left. \begin{aligned} B+C &= \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A \times (B+C) = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ -3 & -2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \\ A \times B &= \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ -1 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}_{3 \times 2}, A \times C = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -2 & -3 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}_{3 \times 2} \Rightarrow (A \times B) + (A \times C) = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ -3 & -2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow A \times (B+C) = (A \times B) + (A \times C)$$

۴ با همان ماتریس‌های معرفی‌شده در شماره (۳) درستی تساوی زیر را بررسی کنید:

$$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$$

$$\left. \begin{aligned} A \times (B \times C) &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 20 \\ -3 & -2 \\ 5 & -5 \end{bmatrix} \\ (A \times B) \times C &= \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ -1 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 20 \\ -3 & -2 \\ 5 & -5 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \Rightarrow A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$$

۱ اگر $A = [a_{ij}]_{3 \times 4}$ ماتریسی 3×4 باشد به طوری که برای $i = j$ داشته باشیم $a_{ij} = 7$ و برای $i > j$ داشته باشیم $a_{ij} = i + j$ و برای $i < j$ داشته باشیم $a_{ij} = i^2$ در این صورت ماتریس A را با درایه‌هایش مشخص کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 1^2 & 1^2 & 1^2 \\ 2+1 & 7 & 2^2 & 2^2 \\ 3+1 & 3+2 & 7 & 3^2 \end{bmatrix}_{3 \times 4} = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 4 & 4 \\ 4 & 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

۲ اگر $A = \begin{bmatrix} 2x-y & 5 \\ z & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 & 2x+y \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ و $A = B$ در این صورت حاصل $(x+y+z)$ را بیابید.

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 2x + y = 5 \\ z = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = -2 \end{cases} \Rightarrow x + y + z = 2 + 1 + (-2) = 1$$

۳ دو ماتریس 3×3 مانند A و B مثال بزنید که $A \neq \bar{O}$ و $B \neq \bar{O}$ ولی $AB = \bar{O}$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \neq \bar{O}, B = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \neq \bar{O} \Rightarrow A \times B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \bar{O}$$

۴ با یک مثال نقض نشان دهید که قانون حذف در ضرب ماتریس‌ها برقرار نمی‌باشد. به عبارت دیگر نشان دهید که در حالت کلی از تساوی $AB = AC$ نمی‌توان نتیجه گرفت $B = C$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A \times C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A \times B = A \times C$$

اما $B \neq C$ یعنی $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$.

۵ اگر A ماتریسی مربعی باشد و توان‌های A را به صورت $A^2 = AA$ و $A^3 = AA^2$ و ... و

$A^n = AA^{n-1}$ ($n \in \mathbb{N}$ $n > 1$) در این صورت با فرض $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ حاصل A^2 و A^3 و A^4 را بیابید.

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A^3 = A \times A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \times A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$