



θ $\sqrt{\delta}$ $\geq$ θ
 α $\times$ β
 π Ω $\{$ μ $\}$ ∞
 $\sim$ β $\{$ μ $\}$ ∞
 $\sqrt{\delta}$ Σ $\#$

θ ∞ $+$ $\approx$
 $\times$ $\in$ $\approx$
 Ω $\{$ μ $\}$ $\in$
 β θ π $\{$ μ $\}$ $\in$
 $\sim$ μ $=$ λ $\times$ β
 ∞ $+$ δ α $\sqrt{\quad}$
 Σ $\#$ β

پرفروش ترین
کتاب های
امتحان
نهایی



۳ ریاضی

پایه دوازدهم
رشته علوم تجربی

مؤلف: مهندس سجاد عظمتی

همکار مؤلف: علی احمدی قرلدشت
نویسنده: فتح اللهی

فرمول



امتحانات نهایی، اکنون بیش از همیشه سرنوشت ساز شده‌اند؛ جایی که تلاش و پشتکار، آینده را رقم می‌زند. این کتاب، همراهی است برای شما، تا با اطمینان، راهی هموار به سوی موفقیت طی کنید.

قدم به قدم، به سوی درک عمیق‌تر

در درسنامه‌ها، هر مفهوم و نکته‌ای را با دقت و جزئیات بررسی کرده‌ایم. این درسنامه‌ها راهی به سوی درک بهتر مطالب و مهارت حل مسئله‌اند. درسنامه‌ها همچون چراغی روشن هستند، به‌ویژه برای کسانی که در طول سال، فرصت مرور کتاب درسی را نداشته‌اند.

شناخت ذهن طراحان امتحان نهایی

با دقت زیاد، تمرین‌ها، فعالیت‌ها، سؤالات کار در کلاس، و حتی تمرین‌های «کتاب راهنمای معلم» را بررسی کرده‌ایم. سؤالات امتحانات نهایی سال‌های گذشته و شبه‌نهایی‌های شهرهای مختلف نیز در این مجموعه جای گرفته‌اند تا شما را با شیوه تفکر طراحان آشنا کنند. همچنین، از سؤالات امتحانات نهایی رشته ریاضی استفاده کرده‌ایم تا خیالتان از همه سؤالات راحت باشد.

سؤالات 21 انتخابی برای بهترین‌ها

اگر می‌خواهید کاملاً آماده باشید، بخش «سؤالات 21»، مجموعه‌ای چالش‌برانگیزتر از امتحانات نهایی است. این سؤالات طراحی شده‌اند تا شما را فراتر از سطح معمول امتحانات نهایی ببرند. هرچقدر خود را با این سؤالات محک بزنید، به موفقیت در امتحان نهایی نزدیک‌تر می‌شوید.

«برای فتح ستاره‌ها، باید نگاهت بالاتر از آسمان باشد.»

چگونه مرور کنیم؟

نگران کمبود زمان نباشید! ما نکات کلیدی را به صورت خلاصه و جامع در «کتابچه» گردآوری کرده‌ایم. همچنین، با ارائه راهنمای تصحیح و نحوه نگارش پاسخ‌برگ، کمک می‌کنیم تا پاسختان مطابق انتظارات آزمون‌های نهایی باشد.

در پایان:

این کتاب، همراه شماست تا آرامش را به لحظات حساس امتحانات بیاورد. بدانید که هرگام شما را یک قدم به موفقیت نزدیک‌تر می‌کند. امیدوارم این مسیر، شما را به نمره‌ای طلایی و لبخندی از رضایت برساند.

سپاسگزاری

از مدیریت محترم انتشارات گاج، جناب آقای محمد جوکار که با حمایت‌های بی‌دریغ خود، زمینه نشر و دسترسی گسترده این اثر را فراهم کردند، قدردانی می‌کنم.

همچنین، از همکاران گرامی‌ام که با دانش، تجربه و پشتیبانی مؤثر و سازنده، من را در روند تألیف و بهبود محتوای کتاب یاری کردند، نهایت سپاس را دارم. اساتید: علی احمدی قزلدشت، نریمان فتح الهی، امیرحسام شکری

امیدوارم ۲۰ بگیری!

 @sajad_azemati

پاسخ	سؤالات	درسنامه
۱۹۶	۲۰	۱۰
۲۲۲	۶۴	۵۴
۲۳۶	۸۴	۸۰
۲۴۷	۱۰۶	۱۰۲
۲۷۲	۱۱۴۹	۱۳۶
۲۸۶	۱۶۷	۱۶۱
۲۹۷	۱۹۲	۱۸۸

فصل اول: تابع
فصل دوم: مثلثات
فصل سوم: حد بی‌نهایت و حد در بی‌نهایت
فصل چهارم: مشتق
فصل پنجم: کاربرد مشتق
فصل ششم: هندسه
فصل هفتم: احتمال

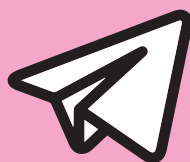
بارم‌بندی درس ریاضی ۳			
شماره فصل	نوبت اول	نوبت دوم	
اول	۷	۲/۵	
دوم	۵	۲/۵	
سوم	۵	۲/۵	
چهارم	۳	۱	تا صفحه ۷۶
	-	۳/۵	صفحه ۷۷ به بعد
پنجم	-	۳	
ششم	-	۳	
هفتم	-	۲	
جمع	۲۰	۲۰	

نمونه امتحانی



آزمون ۱: نوبت اول	۳۰۴
آزمون ۲: نوبت اول	۳۰۵
آزمون ۳: نوبت دوم	۳۰۶
آزمون ۴: نوبت دوم	۳۰۸
آزمون ۵: نوبت دوم	۳۰۹
آزمون ۶: نوبت دوم	۳۱۱
آزمون ۷: نوبت دوم	۳۱۲
پاسخ‌نامه تشریحی آزمون ۱ تا ۷	۳۱۴

برای دسترسی سریع به
این آیدی QR-Code
مقابل را اسکن کنید.



برای دریافت سؤالات
فصل به فصل کلمه
«ریاضی» را به این
آیدی تلگرام
ارسال کنید.

@gajlive_bot



مدرسہ
اینٹرنی
گاج

گاج لایو



۷۵
دقیقه



جلسه
درس ۲
سؤالات
۹۰ تا ۵۹



۷۰
دقیقه



جلسه
درس ۱
سؤالات
۵۸ تا ۴۲



۶۵
دقیقه



جلسه
درس ۱
سؤالات
۴۱ تا ۱



۸۰
دقیقه



جلسه
درس ۲
سؤالات
۱۷۲ تا ۱۵۵



۶۵
دقیقه



جلسه
درس ۲
سؤالات
۱۵۴ تا ۱۱۰



۵۰
دقیقه



جلسه
درس ۲
سؤالات
۱۰۹ تا ۹۱



۵۰
دقیقه



جلسه
درس ۳
سؤالات
۲۲۰ تا ۲۰۷



۶۰
دقیقه



جلسه
درس ۳
سؤالات
۲۰۶ تا ۱۷۳

فصل



۶۰
دقیقه



جلسه
درس ۱
سؤالات
۲۷۲ تا ۲۵۸



۶۰
دقیقه



جلسه
درس ۱
سؤالات
۲۵۷ تا ۲۳۱



۶۰
دقیقه



جلسه
درس ۲
سؤالات
۳۲۱ تا ۲۹۴



۷۵
دقیقه



جلسه
درس ۱
سؤالات
۲۹۳ تا ۲۷۳



۷۵
دقیقه



جلسه
درس ۲
سؤالات
۳۴۷ تا ۳۲۲

فصل



۳۰
دقیقه

جلسه



درس ۱
سؤالات
۳۶۷ تا ۳۶۴



۶۰
دقیقه

جلسه



درس ۱
سؤالات
۳۶۳ تا ۳۴۸



۵۰
دقیقه

جلسه



درس ۲
سؤالات
۴۰۸ تا ۴۰۷



۸۵
دقیقه

جلسه



درس ۱
سؤالات
۴۰۷ تا ۳۶۸



۳۵
دقیقه

جلسه



درس ۱
سؤالات
۴۸۰ تا ۴۹۱



۵۰
دقیقه

جلسه



درس ۱
سؤالات
۴۴۹ تا ۴۷۹



۵۵
دقیقه

جلسه



درس ۲
سؤالات
۵۳۰ تا ۵۴۸



۵۵
دقیقه

جلسه



درس ۲
سؤالات
۴۹۲ تا ۵۲۹



۷۰
دقیقه

جلسه



درس ۲
سؤالات
۵۸۷ تا ۶۰۹



۶۰
دقیقه

جلسه



درس ۲
سؤالات
۵۴۹ تا ۵۸۶



۴۵
دقیقه

جلسه



درس ۳
سؤالات
۶۱۰ تا ۶۴۷



۶۵
دقیقه



جلسه
درس ۲
سؤالات
۷۰ تا ۷۰۴



۷۰
دقیقه



جلسه
درس ۱
سؤالات
۷۰۳ تا ۶۷۷



۷۰
دقیقه



جلسه
درس ۱
سؤالات
۶۴۸ تا ۶۷۶



۳۵
دقیقه



جلسه
درس ۲
سؤالات
۷۳۲ تا ۷۳۸



۶۵
دقیقه



جلسه
درس ۲
سؤالات
۷۳۱ تا ۷۳۱



فصل



۶۵
دقیقه



جلسه
درس ۱
سؤالات
۷۷۹ تا ۸۱۲



۵۰
دقیقه



جلسه
درس ۱
سؤالات
۷۳۹ تا ۷۷۸



۷۰
دقیقه



جلسه
درس ۲
سؤالات
۸۴۴ تا ۸۷۳



۶۰
دقیقه



جلسه
درس ۲
سؤالات
۸۱۳ تا ۸۴۳



فصل



۶۰
دقیقه



جلسه
درس ۱
سؤالات
۸۷۴ تا ۹۰۶



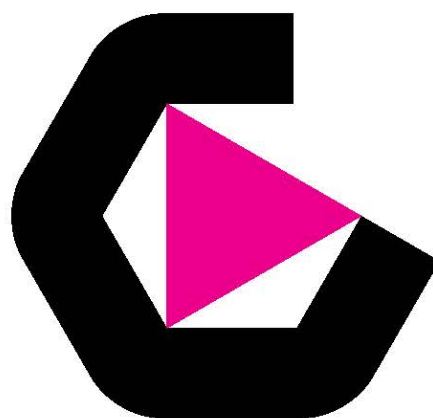
فصل

ریاضی ۳

حل تصویری تک تک سوالات
کتاب فرمول ۲۰ در گاج لایو



برای مشاهده ویدیوها در سایت gajlive.ir
برچسب را خراش داده و از کد زیر استفاده کنید



پشتیبانی
۰۲۱-۶۴۲۰

www.gajlive.ir

فصل اول

درس سوم: تابع وارون

۳

ریاضی دوازدهم

در سال گذشته دیدیم اگر مؤلفه‌های اول و دوم زوج‌های مرتب تابع یک به یک f را جابه‌جا کنیم، رابطه جدیدی به دست می‌آید که آن را وارون تابع f می‌گوییم و با f^{-1} نشان می‌دهیم. یعنی اگر نقطه (a, b) روی نمودار تابع f قرار داشته باشد، نقطه (b, a) روی نمودار تابع f^{-1} قرار دارد.

مثال وارون تابع $f = \{(6, 2), (1, 5), (3, 3)\}$ به صورت مقابل است:

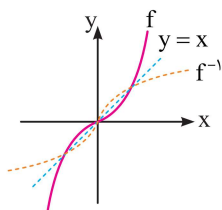
$$f^{-1} = \{(2, 6), (5, 1), (3, 3)\}$$

توجه یک تابع، زمانی وارون پذیر است که یک به یک باشد (و برعکس). بنابراین، اگر تابعی یک به یک نباشد، وارون پذیر نیست.

نمودار تابع و وارونش

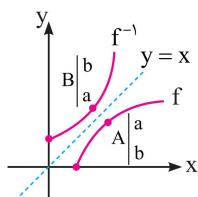
اگر تابع f و تابع f^{-1} را در یک دستگاه مختصات رسم کنیم، می‌بینیم که نمودار f و f^{-1} نسبت به خط $y = x$ قرینه یکدیگرند (متقارن اند). با توجه به این تقارن خواهیم داشت:

$$f(a) = b \Leftrightarrow f^{-1}(b) = a$$



دو نتیجه مهم در تابع وارون

۱ اگر نقطه $A(a, b)$ روی نمودار تابع f باشد، آنگاه نقطه $B(b, a)$ روی نمودار f^{-1} است و برعکس. به شکل مقابل توجه کنید:



۲ همواره دامنه تابع f با برد تابع f^{-1} برابر است. همچنین برد تابع f نیز با دامنه تابع f^{-1} برابر است.

$$R_f = D_{f^{-1}}$$

$$D_f = R_{f^{-1}}$$

مثال اگر f تابعی یک به یک باشد، داریم:

$$f(2) = 5 \Leftrightarrow f^{-1}(5) = 2$$

مثال اگر دامنه تابع یک به یک $f(x)$ بازه $(1, 3)$ و برد آن بازه $[0, +\infty)$ باشد، در تابع وارون $f(x)$ داریم:

$$D_{f^{-1}} = [0, +\infty)$$

$$R_{f^{-1}} = (1, 3)$$

ضابطه وارون تابع

برای به دست آوردن ضابطه وارون تابع یک به یک f ، ابتدا x را بر حسب y تنها می‌کنیم. (یعنی x را در یک طرف ضابطه تنها می‌کنیم و بقیه عبارت‌ها را، به سمت دیگر معادله می‌بریم.) سپس جای x و y را عوض می‌کنیم.

مثال ضابطه وارون تابع $y = 2x + 1$ را به دست می آوریم:

ابتدا x را بر حسب y می نویسیم، سپس جای x و y را عوض می کنیم:

$$y = 2x + 1 \Rightarrow 2x = y - 1 \Rightarrow x = \frac{y-1}{2} \Rightarrow y = \frac{x-1}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$$

سؤال ضابطه وارون توابع زیر را به دست آورید.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{3}{5} - 2x & f(x) &= \frac{-8x+3}{2} \\ g(x) &= \sqrt[3]{x-1} + 1 & g(x) &= -2 + \sqrt{x-5} \\ f(x) &= x^3 + 3x^2 + 3x + 2 & f(x) &= \frac{3}{x-1} + 1 \end{aligned}$$

پاسخ

$$1 \quad f(x) = \frac{-8x+3}{2} \Rightarrow y = \frac{-8x+3}{2} \Rightarrow 2y = -8x+3 \Rightarrow 2y-3 = -8x$$

$$\Rightarrow x = \frac{2y-3}{-8} \xrightarrow{\text{تعويض جای } x, y} y = \frac{2x-3}{-8} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-2x+3}{8}$$

$$2 \quad f(x) = \frac{3}{5} - 2x \Rightarrow y = \frac{3}{5} - 2x \Rightarrow y - \frac{3}{5} = -2x$$

$$\Rightarrow x = \frac{y - \frac{3}{5}}{-2} \xrightarrow{\text{تعويض جای } x, y} y = \frac{x - \frac{3}{5}}{-2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x - \frac{3}{5}}{-2}$$

$$3 \quad g(x) = -2 + \sqrt{x-5} \Rightarrow y = -2 + \sqrt{x-5} \Rightarrow y+2 = \sqrt{x-5} \Rightarrow (y+2)^2 = x-5$$

$$\Rightarrow x = (y+2)^2 + 5 \xrightarrow{\text{تعويض جای } x, y} y = (x+2)^2 + 5 \Rightarrow g^{-1}(x) = (x+2)^2 + 5$$

$$4 \quad g(x) = \sqrt[3]{x-1} + 1 \Rightarrow y = \sqrt[3]{x-1} + 1 \Rightarrow y-1 = \sqrt[3]{x-1} \Rightarrow (y-1)^3 = x-1$$

$$\Rightarrow x = (y-1)^3 + 1 \xrightarrow{\text{تعويض جای } x, y} y = (x-1)^3 + 1 \Rightarrow g^{-1}(x) = (x-1)^3 + 1$$

$$5 \quad f(x) = \frac{3}{x-1} + 1 \Rightarrow y = \frac{3}{x-1} + 1 \Rightarrow y-1 = \frac{3}{x-1} \Rightarrow yx - y - x + 1 = 3$$

$$\Rightarrow x(y-1) = 2+y \Rightarrow x = \frac{2+y}{y-1}$$

$$\xrightarrow{\text{تعويض جای } x, y} y = \frac{x+2}{x-1} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+2}{x-1}$$

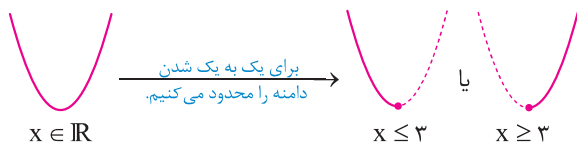
$$6 \quad f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 2 \Rightarrow y = \underbrace{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}_{(x+1)^3} + 1 \Rightarrow y = (x+1)^3 + 1$$

$$\Rightarrow y-1 = (x+1)^3 \Rightarrow \sqrt[3]{y-1} = x+1 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y-1} - 1 \xrightarrow{\text{تعويض جای } x, y} y = \sqrt[3]{x-1} - 1$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1} - 1$$

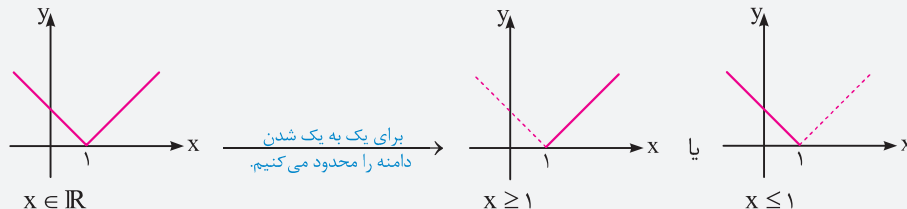
محدود کردن دامنه تابع

از سال قبل می دانیم که اگر تابعی یک به یک نباشد وارون پذیر هم نیست. اما گاهی با محدود کردن دامنه یک تابع، می توان تابعی یک به یک به دست آورد. به عنوان مثال به نمودار تابع $y = x^2 - 6x + 1$ توجه کنید. این تابع در $\mathbb{R}$ غیریک به یک است، چون خطوط موازی با محور x ، تابع را در بیش از یک نقطه قطع می کنند. اما تابع در هریک از بازه های $(-\infty, 3]$ یا $[3, +\infty)$ یک به یک است.



در حالت کلی تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ یک به یک نیست. برای ساختن تابعی یک به یک از این تابع باید رأس سهمی را پیدا کنیم و دامنه را به قبل یا بعد از طول رأس سهمی محدود کنیم. بنابراین تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ در هریک از بازه‌های $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$ یا $[-\frac{b}{2a}, +\infty)$ و یا هر زیرمجموعه از این دو بازه، یک به یک است. در توابع قدرمطلق به فرم $y = |ax + b|$ باید دامنه تابع را به قبل یا بعد از ریشه داخل قدرمطلق محدود کنیم.

مثال تابع $y = |x - 1|$ در $\mathbb{R}$ یک به یک نیست، اما می‌توان آن را به صورت زیر محدود کرد تا یک به یک باشد:



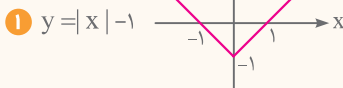
سؤال با رسم نمودار توابع زیر، دامنه تابع را به طور دلخواهی محدود کنید تا تابعی وارون پذیر ساخته شود.

۳ $y = |x| + x$

۲ $y = x^2 + 2x$

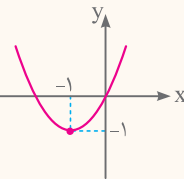
۱ $y = |x| - 1$

پاسخ ابتدا توابع داده شده را رسم می‌کنیم:



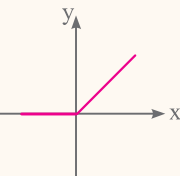
تابع در هریک از بازه‌های $(-\infty, 0]$ ، $[0, +\infty)$ یک به یک و وارون پذیر است.

۲ $y = x^2 + 2x \Rightarrow y = \underbrace{x^2 + 2x + 1}_{(x+1)^2} - 1 \Rightarrow y = (x+1)^2 - 1$



تابع در هریک از بازه‌های $(-\infty, -1]$ ، $[-1, +\infty)$ یک به یک و وارون پذیر است.

۳ $y = |x| + x = \begin{cases} 2x & ; x \geq 0 \\ 0 & ; x < 0 \end{cases}$



تابع در بازه $[0, +\infty)$ یک به یک و وارون پذیر است.

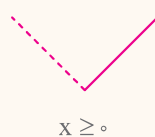
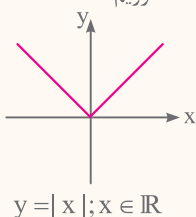
نکته برای وارون کردن توابع غیر یک به یک، ابتدا باید دامنه تابع طوری محدود شود تا تابع یک به یک ساخته شود و سپس با روش کلی وارون تابع را پیدا کنیم.

سؤال توابع زیر یک به یک نیستند. با محدود کردن دامنه آن‌ها توابعی یک به یک بسازید و ضابطه وارون آن‌ها را به دست آورید و دامنه و برد آن‌ها را نیز بنویسید.

۲ $y = x^2 + 4x + 3$

۱ $y = |x|$

پاسخ ۱ با توجه به نمودار تابع $y = |x|$ ، این تابع یک به یک نیست. اما می‌توانیم با محدود کردن دامنه آن، تابعی یک به یک به دست آوریم.



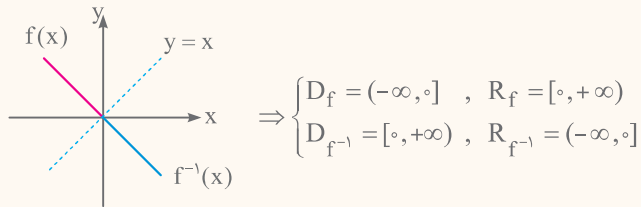
تابع در هریک از بازه‌های $(-\infty, 0]$ ، $[0, +\infty)$ یک به یک و وارون پذیر است.

مثلاً دامنه تابع را به بازه $(-\infty, 0]$ محدود می‌کنیم. ضابطه آن را $f(x)$ می‌نامیم. حالا f را وارون می‌کنیم:

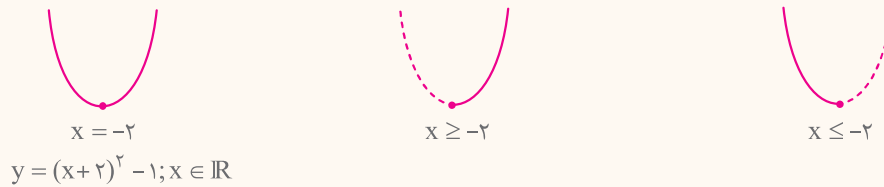
ابتدا x را بر حسب y به دست می‌آوریم:

$$f(x) = -x \Rightarrow y = -x \Rightarrow x = -y \xrightarrow{\text{تعویض جای } y, x} y = -x \Rightarrow f^{-1}(x) = -x$$

نمودار تابع f و f^{-1} به صورت زیر است:



۲ ابتدا ضابطه تابع $y = x^2 + 4x + 3$ را به صورت $y = (x+2)^2 - 1$ ساده‌تر می‌کنیم. نمودار تابع $y = (x+2)^2 - 1$ نشان می‌دهد که این تابع یک به یک نیست. اما می‌توانیم با محدود کردن دامنه این تابع، آن را طوری محدود کنیم که تابعی یک به یک به دست آید.

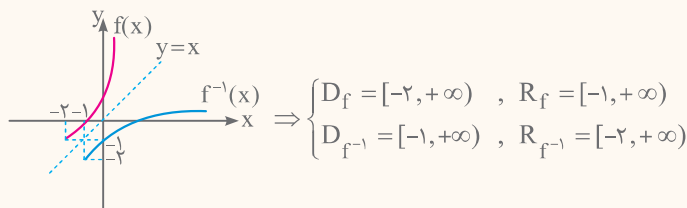


تابع در هریک از بازه‌های $(-\infty, -2]$ و $[-2, +\infty)$ یک به یک و وارون پذیر است.

مثلاً دامنه تابع را به بازه $[-2, +\infty)$ محدود می‌کنیم و آن را $f(x)$ می‌نامیم، حالا f را وارون می‌کنیم:

$$\begin{aligned} f(x) = (x+2)^2 - 1 &\Rightarrow y = (x+2)^2 - 1 \Rightarrow y+1 = (x+2)^2 \\ \Rightarrow \sqrt{y+1} = |x+2| &\xrightarrow{x \geq -2} \sqrt{y+1} = x+2 \Rightarrow x = \sqrt{y+1} - 2 \\ \xrightarrow{\text{تعویض جای } y, x} y &= \sqrt{x+1} - 2 \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x+1} - 2 \end{aligned}$$

نمودار تابع f و f^{-1} به صورت زیر است:



ترکیب تابع با وارون خود

اگر f تابعی وارون پذیر و f^{-1} وارون آن باشد، همواره داریم:

$$f(f^{-1}(x)) = x ; x \in D_{f^{-1}}$$

$$f^{-1}(f(x)) = x ; x \in D_f$$

ضابطه هر دو تابع فوق، تابعی همانی ($y = x$) شده است، اما این دو با هم برابر نیستند، زیرا که دامنه‌های متفاوتی دارند، به مثال زیر توجه کنید:

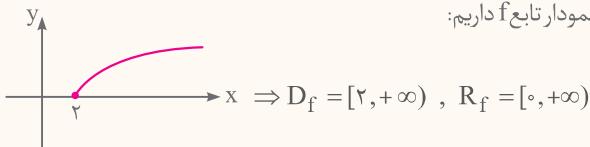
مثال اگر $f = \{(2, 5), (3, 4), (-1, 6)\}$ باشد، آن‌گاه $f^{-1} = \{(5, 2), (4, 3), (6, -1)\}$ است، بنابراین:

$$\textcircled{1} (f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = \{(5, 5), (4, 4), (6, 6)\} \Rightarrow D_{f \circ f^{-1}(x)} = \{4, 5, 6\}$$

$$\textcircled{2} (f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = \{(2, 2), (3, 3), (-1, -1)\} \Rightarrow D_{f^{-1} \circ f(x)} = \{-1, 2, 3\}$$

سؤال اگر $f(x) = \sqrt{x-2}$ باشد، توابع $y = (f \circ f^{-1})(x)$ و $y = (f^{-1} \circ f)(x)$ را به دست آورید. سپس نمودار آن‌ها را رسم کنید.

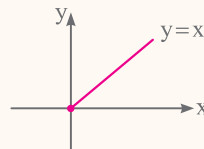
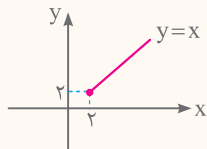
پاسخ ابتدا باید دامنه و بُرد تابع $f(x) = \sqrt{x-2}$ را به دست آوریم. با توجه به نمودار تابع f داریم:



بنابراین، ضابطه دو تابع $y = (f \circ f^{-1})(x)$ و $y = (f^{-1} \circ f)(x)$ برابر است با:

$$1) (f^{-1} \circ f)(x) = x ; x \in D_f = [2, +\infty)$$

$$2) (f \circ f^{-1})(x) = x ; x \in D_{f^{-1}} = R_f = [0, +\infty)$$



دو تابع وارون هم

با توجه به آن چه که دیدیم می توان گفت اگر دو تابع f و g به گونه ای باشند که:

$$1) (f \circ g)(x) = x ; x \in D_g$$

$$2) (g \circ f)(x) = x ; x \in D_f$$

آن گاه توابع f و g وارون یکدیگرند.

مثال می خواهیم نشان دهیم تابع $f(x) = 3x - 4$ و $g(x) = \frac{x+4}{3}$ وارون همدیگرند:

باید ثابت کنیم ترکیب دو تابع f و g برابر تابع همانی است، یعنی:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 3g(x) - 4 = 3\left(\frac{x+4}{3}\right) - 4 = x \quad (x \in D_g)$$

همچنین:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{f(x)+4}{3} = \frac{3x-4+4}{3} = x \quad (x \in D_f)$$

بنابراین دو تابع f و g وارون یکدیگرند.

سؤال در مورد هریک از قسمت های زیر نشان دهید که f و g وارون یکدیگرند.

$$1) f(x) = -\frac{5}{2}x - 3, \quad g(x) = -\frac{2x+6}{5}$$

$$2) f(x) = -\sqrt{x-1}, \quad g(x) = 1+x^2 ; x \leq 0$$

پاسخ باید ثابت کنیم ترکیب دو تابع f و g برابر تابع همانی است، داریم:

$$1) (f \circ g)(x) = f(g(x)) = -\frac{5}{2}g(x) - 3 = -\frac{5}{2}\left(-\frac{2x+6}{5}\right) - 3 = x \quad (x \in D_g)$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = -\frac{2f(x)+6}{5} = -\frac{2\left(-\frac{5}{2}x-3\right)+6}{5} = x \quad (x \in D_f)$$

بنابراین دو تابع f و g وارون یکدیگرند.

$$2) f \circ g(x) = f(g(x)) = -\sqrt{g(x)-1} = -\sqrt{1+x^2-1} = -\sqrt{x^2} = -|x| \xrightarrow{x \leq 0} -(-x) = x \quad (x \in D_g)$$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = 1+(-\sqrt{x-1})^2 = 1+x-1 = x \quad (x \in D_f)$$

بنابراین دو تابع f و g وارون یکدیگرند.

وارون ترکیب دو تابع

اگر f و g دو تابع وارون پذیر باشند، آن گاه:

$$(f \circ g)^{-1}(x) = (g^{-1} \circ f^{-1})(x)$$

$$(g \circ f)^{-1}(x) = (f^{-1} \circ g^{-1})(x)$$

سؤال اگر $f(x) = \frac{x^3}{4} + 1$ و $g(x) = x - 5$ باشد، مفاد زیر را محاسبه کنید.

۲ $(g^{-1} \circ g^{-1})(3)$

۱ $(f^{-1} \circ g^{-1})(0)$

پاسخ ابتدا ضابطه تابع $g \circ f(x)$ را به دست می آوریم و سپس آن را وارون می کنیم تا ضابطه تابع $(f^{-1} \circ g^{-1})(x)$ به دست آید:

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = f(x) - 5 = \left(\frac{x^3}{4} + 1\right) - 5 = \frac{x^3}{4} - 4$$

$$\Rightarrow y = \frac{x^3}{4} - 4 \Rightarrow y + 4 = \frac{x^3}{4} \Rightarrow 4(y + 4) = x^3$$

$$\Rightarrow x = \sqrt[3]{4y + 16} \xrightarrow{\text{تعویض جای } y, x} y = \sqrt[3]{4x + 16} \Rightarrow (g \circ f)^{-1}(x) = f^{-1} \circ g^{-1}(x) = \sqrt[3]{4x + 16}$$

اکنون حاصل $(f^{-1} \circ g^{-1})(0)$ را به دست می آوریم:

$$(f^{-1} \circ g^{-1})(0) = \sqrt[3]{4(0) + 16} = \sqrt[3]{16} = 2$$

۲ ابتدا ضابطه تابع $(g \circ g)(x)$ را به دست می آوریم و سپس آن را وارون می کنیم.

تا ضابطه تابع $(g^{-1} \circ g^{-1})(x)$ به دست آید:

$$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(x) - 5 = (x - 5) - 5 = x - 10$$

$$\Rightarrow y = x - 10 \Rightarrow x = y + 10 \xrightarrow{\text{تعویض جای } y, x} y = x + 10 \Rightarrow (g \circ g)^{-1}(x) = (g^{-1} \circ g^{-1})(x) = x + 10$$

اکنون حاصل $(g^{-1} \circ g^{-1})(3)$ را حساب می کنیم:

$$(g^{-1} \circ g^{-1})(3) = 3 + 10 = 13$$

تابع وارون

پرسش های تشریحی

درس
۳

• درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

۱۷۳. اگر $g = \{(1, 5), (5, 3)\}$ آن گاه $g^{-1}(5) = 1$ است.

۱۷۴. دو تابع $f(x) = -\frac{2x+6}{4}$ و $g(x) = -\frac{4}{3}x - 3$ وارون یکدیگرند.

۱۷۵. دو تابع با ضابطه های $f(x) = x^3$ و $g(x) = \sqrt[3]{x}$ وارون یکدیگرند.

۱۷۶. نمودار تابع و وارون آن نسبت به نیمساز ربع دوم و چهارم قرینه اند.

۱۷۷. تمام توابع خطی وارون پذیرند.

۱۷۸. تابع با ضابطه $y = |x^3|$ وارون پذیر است.

۱۷۹. اگر f تابعی یک به یک باشد، آن گاه $(f^{-1} \circ f)(x) = (f \circ f^{-1})(x)$ است.

۱۸۰. هر تابع وارون پذیر، اکیداً یکنوا است.

۱۸۱. اگر $f(x) = x + \sqrt{x}$ باشد، آن گاه $f^{-1}(12) = 9$.

۱۸۲. وارون تابع $y = x^3 + x$ از نقطه $(2, 1)$ عبور می کند.

۱۸۳. اگر $f(2, 4) \in g$ و $f(4, 1) \in g$ باشد آن گاه $(f^{-1} \circ g^{-1})(1) = 2$.

۱۸۴. اگر f تابعی یک به یک باشد، آن گاه وارون تابع $y = f^{-1}(x)$ برابر $y = f(x)$ است.

۱۸۵. دو تابع $(f \circ g)(x)$ و $(g \circ f)(x)$ فقط در حالتی با هم برابر هستند که $f(x) = g(x)$ باشد.

۱۸۶. اگر f و g دو تابع زوج مرتبی باشند که $f(1, 3) \in g$ و $f(1, 2) \in g$ باشند، حاصل $(f \circ g^{-1})(2)$ برابر با ۳ است.

• جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

۱۸۷. اگر $f = \{(2, 3), (3, 5)\}$ باشد، حاصل $f^{-1}(3)$ برابر است.

۱۸۸. اگر $f(x) = 2x^3 - 1$ باشد، حاصل $f^{-1}(15)$ برابر است.

۱۸۹. ضابطه تابع وارون $y = \sqrt{x}$ برابر با است.

(خرداد ۹۹ و دی ۱۴۰۰)

(شهریور ۱۴۰۰)

(خرداد ۱۴۰۱)

(شهریور ۱۴۰۱)

۱۹۰. ضابطه تابع وارون $y = x^3$ ، برابر است.

(خرداد ۱۴۰۲)

۱۹۱. دامنه تابع $(f^{-1} \circ f)(x)$ برابر با است.

۱۹۲. اگر $f(x) = 3 + \sqrt{2x-1}$ باشد، مقدار $(f \circ f^{-1})(5)$ برابر است.

۱۹۳. اگر $f = \{(1,2), (3,4), (5,6)\}$ باشد، آنگاه $f \circ f^{-1}$ برابر است.

۱۹۴. اگر $f(x) = 2x - 4$ و $g(x) = x^3 + x$ باشند، مقدار $(g^{-1} \circ f^{-1})(0)$ برابر است.

(شهریور ۹۸ خارج)

۱۹۵. اگر $f(x) = \frac{1}{8}x - 3$ و $g(x) = x^3$ ، مقدار $(f \circ g)^{-1}(5)$ برابر است با

۱۹۶. اگر دو تابع f و g وارون یکدیگر باشند، آنگاه حاصل هر دو تابع مرکب $f \circ g$ و $g \circ f$ برابر تابع است.

(حسابان شهریور ۱۴۰۳)

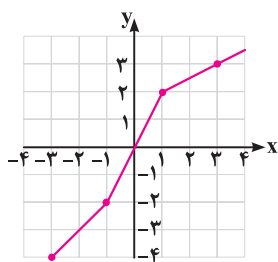
۱۹۷. تابع $f(x) = (x-2)^3 + 1$ را در نظر بگیرید. نمودار f^{-1} از ناحیه محورهای مختصات عبور نمی‌کند.

مسائل

تابع وارون

سرنخ یکی از مهم‌ترین چیزهایی که باید توی مسائل تابع وارون یادت باشه، اینه که اگه نقطه $A(a, b)$ روی نمودار تابع f باشه، نقطه $A'(b, a)$ روی نمودار تابع f^{-1} قرار داره.

۱۹۸. از نمودار تابع f برای تکمیل جدول استفاده کنید.



x	-4	-2	2	3
$f^{-1}(x)$				

سرنخ یک سؤال معروف در امتحان نهایی، اینه که باید نشون بدید دو تابع f و g وارون یکدیگر هستند. برای این کار، کافیه نشون بدی ترکیب این دو تابع برابر تابع همانی (یعنی $y = x$) است!

۱۹۹. در موارد زیر، نشان دهید توابع f و g وارون یکدیگرند.

(خرداد ۹۹ خارج)

۱ $g(x) = \frac{3-2x}{8}$, $f(x) = \frac{-8x+3}{2}$

(تمرین کتاب درسی)

۲ $f(x) = -\sqrt{x-8}$, $g(x) = 8+x^2$; $x \leq 0$

۳ $g(x) = \frac{1}{x-3}$, $f(x) = \frac{1}{x} + 3$

سرنخ حالا وقتشه ضابطه تابع وارون پیدا کنیم. جای x و y رو عوض می‌کنیم و...

۲۰۰. ضابطه وارون توابع زیر را به دست آورید.

۱ $f(x) = \frac{-3x-4}{5}$

۲ $f(x) = \sqrt[3]{x} + 2$

۳ $f(x) = 3 - \sqrt{2x+5}$

۴ $f(x) = (x-2)^3 + 1$

۵ $f(x) = \frac{x-1}{2x+5}$

۲۰۱. اگر $f(x) = \sqrt{x-2} + 2$ باشد، وارون تابع f را به دست آورید و نمودار آن را رسم کنید. سپس دامنه و برد آن را تعیین کنید.

(خرداد ۱۴۰۰ خارج)

۲۰۲. با محدود کردن دامنه تابع $y = x^2 - 2x + 2$ ، یک تابع یک به یک به دست آورده و دامنه و برد تابع و وارون آن را بنویسید.

۲۰۳. در صورت یک به یک بودن تابع $f(x) = -(x-2)^2$ برای $x \leq 2$ ، وارون آن را بیابید و دامنه و برد آن را مشخص کنید.

21! ۲۰۴. اگر وارون تابع با ضابطه $f(x) = \frac{-3x+k}{4}$ از نقطه $(0,1)$ بگذرد، مقدار $f^{-1}(2)$ را محاسبه کنید.

21! ۲۰۵. نمودار تابع $f(x) = \frac{x-3}{4}$ را نسبت به خط $y = x$ قرینه می‌کنیم. سپس آن را ۶ واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم. ضابطه تابع حاصل را به دست آورید.

21! ۲۰۶. ضابطه وارون تابع $y = -|x-1| + 2$ در بزرگ‌ترین بازه‌ای که اکیداً نزولی است را به دست آورید.

21! ۲۰۷. ضابطه وارون تابع $f(x) = x|x|$ را بیابید و نمودار تابع f^{-1} را رسم کنید.

21! ۲۰۸. ضابطه وارون تابع $y = 2x + |x|$ را بیابید و نمودار آن را رسم کنید.

21! ۲۰۹. پس از رسم تابع $f(x) = x^2\sqrt{x^2}$ مشاهده می‌شود که در یک بازه اکیداً نزولی است. ضابطه وارون را در این بازه به دست آورید.

21! ۲۱۰. ضابطه وارون تابع $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$ را به دست آورید.

21! ۲۱۱. اگر $x \geq 1$ ؛ $f(x) = x^2 - 2x - 3$ باشد و $g(x) = \frac{x-9}{4}$ جواب معادله $g(x) = f^{-1}(x)$ را بیابید.

21! ۲۱۲. قرینه نمودار تابع $y = 2 + \sqrt{x-1}$ را نسبت به خط $y = x$ رسم کرده و سپس نمودار حاصل را ۲ واحد در جهت مثبت محور x ها و ۳ واحد در جهت منفی محور y ها انتقال می‌دهیم و آن را $y = g(x)$ می‌نامیم. ضابطه تابع $g(x)$ را بیابید.

21! ۲۱۳. ضابطه وارون تابع $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x \geq 0 \\ \frac{x}{2}-1 & x < 0 \end{cases}$ را به دست آورید.

در سؤالات زیر، لازمه که هم به ویژگی‌های تابع وارون توجه کنی و هم به ویژگی‌های ترکیب توابع.



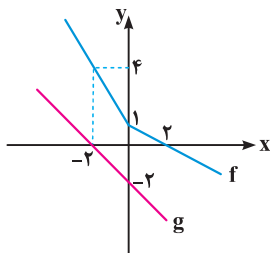
(خرداد ۱۴۰۴)

۲۱۴. اگر $f(x) = \sqrt{x-2}$ باشد، آن‌گاه:

آ دامنه $f^{-1} \circ f$ را به دست آورید.

ب مقدار $f^{-1}(5)$ را محاسبه کنید.

۲۱۵. نمودار توابع $y = f(x)$ و $y = g(x)$ را در نظر بگیرید. با توجه به نمودار مقادیر زیر را در صورت وجود به دست آورید:



آ $(g^{-1} \circ f^{-1})(1)$

ب $(g \circ f)^{-1}(-2)$

۲۱۶. اگر $f(x) = \frac{1}{x} - 3$ و $g(x) = x^3$ ، مقادیر زیر را به دست آورید.

آ $(f \circ g)^{-1}(5)$

ب $(f^{-1} \circ f^{-1})(6)$

پ $(g^{-1} \circ f^{-1})(-2)$

۲۱۷. اگر $f(x) = \frac{2}{x} - 4$ و $g(x) = x^3 + x$ باشند، مقدار $(g^{-1} \circ f^{-1})(8)$ کدام است؟

۲۱۸. با فرض $x \geq 2$ ، $f(x) = x^2 - 4x + 9$ و $g(x) = \frac{3-x}{4}$ ، حاصل $(f^{-1} \circ g^{-1})(-9)$ کدام است؟

21! ۲۱۹. اگر $f = \{(1, 4), (2, 3), (5, 1)\}$ و $g = \{2|x| + 1\}$ باشد، $f^{-1}(g(a)) = 2$ را بیابید.

21! ۲۲۰. دو تابع $f = \{(5, 2), (7, 3), (1, 4), (3, 6), (9, 1)\}$ و $g(x) = \sqrt{5x+9}$ مفروض‌اند. اگر $(g^{-1} \circ f^{-1})(a) = 8$ باشد، a را بیابید.

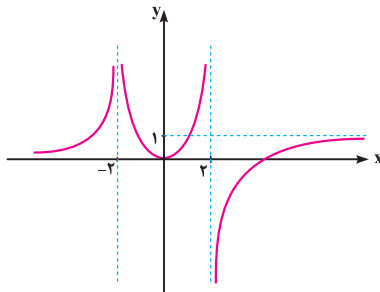
(تمرین صفحه ۵۷ کتاب درسی)

۳۹۰. ۱. عبارت $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$ به چه معناست؟ توضیح دهید.

۲. عبارت $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ به چه معناست؟ توضیح دهید.

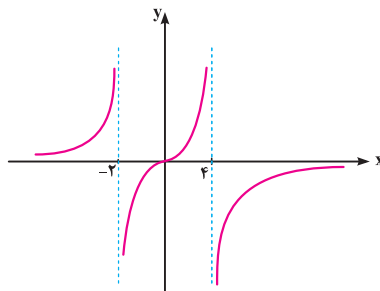
۳. نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که در هر دو شرط بالا صدق کند. مسئله چند جواب دارد؟

۳۹۱. ۲۱. با توجه به نمودار تابع f ، حاصل حدهای زیر را بیابید.



۱. $\lim_{x \rightarrow -2} xf(x)$

۲. $\lim_{x \rightarrow 2} f^2(x)$



۳۹۲. ۲۱. با توجه به نمودار تابع $y = f(x)$ ، حاصل حدهای زیر را بیابید.

۱. $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(-x)$

۲. $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x^2)$

سرنخ در حدهای کسری، وقتی حاصل حد مخرج کسر برابر صفر بشه و حاصل حد صورت کسر، یک عدد حقیقی غیر صفر باشه، حاصل حد برابر $+\infty$ یا $-\infty$ میشه.

۳۹۳. حاصل حدهای زیر را بیابید.

۱. $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 + 1}{3 - x}$

۱. $\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{2x}{x - 5}$ (خرداد ۹۹)

۲. $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{|x|}{x^2 - 1}$

۲. $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1 - 5x}{x^2 - 9}$ (خرداد ۹۸ خارج)

۳. $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-[x] - 1}{x^2 - 4}$

۳. $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{[x] - 4}{4 - x}$ (خرداد ۱۴۰۴)

۳۹۴. حاصل حدهای زیر را بیابید.

۱. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x| + 2}{|x + 1| - 2x}$

۱. $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1 + \sqrt{1 - x}}{|x - 1|}$

۲. $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{[x]}{x^3 - 4x}$

۲. $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{[x] + x}{x^2 + x}$

سرنخ بعضی وقت‌ها در مخرج کسر عبارتهایی وجود داره که همواره مثبت هستن. مثلاً در مخرج کسر، عبارت مربع کامل یا قدر مطلق وجود داره. در این سوالات، به علامت مثبت و منفی، خیلی توجه کنید.

۳۹۵. حاصل حدهای زیر را بیابید.

۱. $\lim_{x \rightarrow -6} \frac{3x}{(x + 6)^2}$

۱. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{-1}{(x - 3)^4}$

۲. $\lim_{x \rightarrow \frac{-1}{2}} \frac{4x + 4}{(2x + 1)^2}$ (شهریور ۱۴۰۰)

۲. $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x + 3|}{|x - 2|}$

۳. $\lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{3})} \frac{[x]}{|3x + 1|}$ (خرداد ۱۴۰۰)

۳. $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2[-x] + 1}{|x - 2|}$ (دی ۱۴۰۳)

۲۱! ۳۹۶. حاصل حدهای زیر را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{|x|+1}{\sqrt{x^2+4x+4}} \quad \text{ب} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{x^2-2x+1} \quad \text{ا}$$

سرنخ برای تحلیل حدهایی که در مخرج آن‌ها عبارت مثلثاتی وجود دارد، از دایره مثلثاتی یا نمودار کمک بگیرید.

۳۹۷. حاصل حدهای زیر را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{2}{1-\sin x} \quad \text{ب} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{1}{\cos x} \quad \text{ا} \quad (\text{شهریور ۱۴۰۱})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-2}{|\sin x|} \quad \text{ت} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{[x]}{\sin x} \quad \text{پ} \quad (\text{خرداد ۹۸})$$

۳۹۸. حاصل حدهای زیر را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{ب} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} \tan x \quad \text{ا}$$

۳۹۹. حاصل حدهای زیر را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2x - \cos x}{1 - \sin x} \quad \text{ب} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5}{1 + \cos(\pi x)} \quad \text{ا}$$

سرنخ حالا بریم چنتا سؤال سخت‌تر هم ببینیم که اگه امتحان نهایی سخت شد، ما خیالمون راحت باشه.

۲۱! ۴۰۰. با توجه به تابع $f(x) = \frac{x+1}{x+|x|}$ ، حاصل حدهای زیر را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \quad \text{ب} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \quad \text{ا}$$

۲۱! ۴۰۱. حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x-4}{x^3-6x^2+12x-8}$ را بیابید.

۲۱! ۴۰۲. حاصل $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2-5x+6}{2x^3-13x^2+24x-9}$ را بیابید.

۲۱! ۴۰۳. اگر $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-4}{x^2+ax+b} = -\infty$ باشد، مقادیر a و b را بیابید.

۲۱! ۴۰۴. اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{ax-6}{(x-2)^2} = -\infty$ باشد، مقادیر طبیعی a را بیابید.

۲۱! ۴۰۵. با توجه به تابع $f(x) = \frac{\cos x}{2\sin x - \sqrt{2}}$ ، حاصل حدهای زیر را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{3\pi}{4})^-} f(x) \quad \text{ب} \quad \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^-} f(x) \quad \text{ا}$$

۲۱! ۴۰۶. با توجه به تابع $f(x) = \frac{2}{\sqrt{3}\cos x - \sin x}$ ، حاصل حدهای زیر را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{3})^-} f(x) \quad \text{ب} \quad \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{3})^+} f(x) \quad \text{ا}$$

۲۱! ۴۰۷. حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^+} \log\left(\frac{x-2}{3}\right)$ را بیابید.

یادداشت:

فصل ششم

درس دوم: دایره

۲

ریاضی دوازدهم

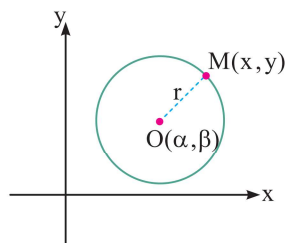
دایره

با تعریف دایره در سال یازدهم آشنا شدیم. می‌دانیم دایره، مجموعه نقاطی از صفحه است که فاصله آنها از نقطه ثابتی در همان صفحه، مقداری ثابت و مثبت باشد. این نقطه ثابت را مرکز دایره و مقدار ثابت را شعاع دایره و مرکز O و شعاع r را معمولاً با نماد $C(O, r)$ نمایش می‌دهیم. در این درس به تحلیل برخی از ویژگی‌های دایره در دستگاه مختصات خواهیم پرداخت.

معادله دایره

۱. معادله استاندارد دایره

در سال قبل فاصله دو نقطه $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ را با رابطه $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ به دست آوردیم. دایره $C(O, r)$ را به گونه ای در نظر بگیرید که مرکز آن نقطه $O(\alpha, \beta)$ و نقطه $M(x, y)$ نقطه دلخواهی روی آن باشد. می‌دانیم که فاصله مرکز دایره از تمام نقاط روی آن برابر با مقدار ثابت r است. بنابراین به کمک رابطه فاصله دو نقطه داریم:



$$OM = \sqrt{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2} \xrightarrow{OM=r} r = \sqrt{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2}$$

اگر طرفین این رابطه را به توان ۲ برسانیم به معادله دایره می‌رسیم.

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$$

پس می‌توان نوشت:

رابطه $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$ معادله دایره‌ای به مرکز $O(\alpha, \beta)$ و شعاع r در صفحه مختصات است که به آن معادله استاندارد دایره می‌گوییم.

مثال ! چند معادله دایره زیر را تحلیل می‌کنیم:

- دایره‌ای به مرکز $O(1, 1)$ و شعاع ۲ $\Rightarrow (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$
- دایره‌ای به مرکز $O(0, 2)$ و شعاع ۳ $\Rightarrow x^2 + (y - 2)^2 = 9$
- دایره‌ای به مرکز $O(0, 0)$ و شعاع ۱ $\Rightarrow x^2 + y^2 = 1$
- دایره‌ای به مرکز $O(-2, -3)$ و شعاع $\sqrt{5}$ $\Rightarrow (x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 5$

سؤال معادله استاندارد دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن نقطه $(-3, 5)$ و شعاع آن $\frac{1}{4}$ باشد.

پاسخ دیدیم که معادله استاندارد دایره‌ای به مرکز $O(\alpha, \beta)$ و شعاع r به صورت $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$ است. با جای‌گذاری $O(-3, 5)$ و $r = \frac{1}{4}$ در آن داریم:

$$(x + 3)^2 + (y - 5)^2 = \frac{1}{16}$$

۲. معادله گسترده دایره

فرض کنید معادله استاندارد یک دایره به صورت $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 4$ باشد، همان طور که آموختید این معادله، دایره‌ای به مرکز $(2, -1)$ و شعاع ۲ است. حال می‌توان با استفاده از اتحاد مربع دو جمله‌ای نمایش دیگری برای این معادله نوشت:

$$\underbrace{(x-2)^2}_{x^2-4x+4} + \underbrace{(y+1)^2}_{y^2+2y+1} = 4 \Rightarrow x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$$

این رابطه را معادله گسترده دایره می‌نامیم. بدیهی است که معادله استاندارد دایره و معادله گسترده آن به یکدیگر قابل تبدیل اند.

• قبل از شروع تبدیل معادله گسترده دایره به معادله استاندارد نیاز است رابطه مربع کامل را یادآوری کنیم:

در سال دهم آموختید که اگر عبارتی به شکل $x^2 + ax$ باشد می‌توان آن را به شکل $(x + \frac{a}{2})^2 - \frac{a^2}{4}$ نمایش داد. حال معادله گسترده یک دایره را به شکل $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ در نظر می‌گیریم. با تبدیل $x^2 + ax$ و $y^2 + by$ به دو مربع کامل داریم:

$$(x^2 + ax) + (y^2 + by) + c = 0 \Rightarrow (x + \frac{a}{2})^2 - \frac{a^2}{4} + (y + \frac{b}{2})^2 - \frac{b^2}{4} + c = 0$$

$$\Rightarrow (x + \frac{a}{2})^2 + (y + \frac{b}{2})^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4}$$

مختصات مرکز و طول شعاع در معادله گسترده دایره

• اگر $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ معادله گسترده یک دایره باشد، مختصات مرکز این دایره و شعاع آن برابر است با:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \xrightarrow{\text{مرکز و شعاع}} \begin{cases} O(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}) \\ r = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} \end{cases}$$

توجه به رابطه محاسبه r دقت کنید، چون $a^2 + b^2 - 4c$ در زیر رادیکال قرار گرفته معادله $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ معادله یک دایره است اگر و تنها اگر رابطه $a^2 + b^2 - 4c > 0$ برقرار باشد.

مثال ! معادله دایره‌های زیر را تحلیل می‌کنیم:

❶ $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$

$$\begin{cases} a = -2 \\ b = -4 \\ c = -4 \end{cases} \quad O(\frac{-a}{2}, \frac{-b}{2}) = (1, 2) \quad \text{و} \quad r = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 16 + 16} = \frac{1}{2} \sqrt{36} = 3$$

پس این معادله دایره‌ای به مرکز $O(1, 2)$ و شعاع $r = 3$ است، می‌توان این دایره را در معادله استاندارد به صورت زیر نمایش داد:

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 9$$

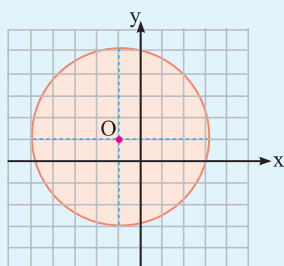
❷ $x^2 + y^2 + 2y = 0$

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = 2 \\ c = 0 \end{cases} \quad O(\frac{-a}{2}, \frac{-b}{2}) = (0, -1) \quad \text{و} \quad r = \frac{1}{2} \sqrt{(0)^2 + (2)^2 - 4(0)} = \frac{1}{2} \sqrt{4} = 1$$

پس این معادله دایره‌ای به مرکز $O(0, -1)$ و شعاع $r = 1$ است، می‌توان این دایره را در معادله استاندارد به صورت زیر نمایش داد:

$$x^2 + (y+1)^2 = 1$$

سؤال معادله استاندارد دایره زیر را بنویسید و نقطه تلاقی آن با محورهای مختصات را پیدا کنید.



پاسخ با توجه به نمودار داده شده، مختصات مرکز دایره نقطه $(-1, 1)$ و شعاع دایره برابر ۴ است.

بنابراین معادله استاندارد این دایره را می‌توانیم به صورت $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 16$ بنویسیم.

برای یافتن محل برخورد این دایره با محورهای مختصات، می‌دانیم در محل برخورد با محور y ها، طول نقاط برابر صفر است:

$$\text{محل برخورد با محور } y \text{ ها: } (x+1)^2 + (y-1)^2 = 16 \xrightarrow{x=0} (0+1)^2 + (y-1)^2 = 16$$

$$\Rightarrow (y-1)^2 = 15 \Rightarrow \begin{cases} y-1 = \sqrt{15} \\ y-1 = -\sqrt{15} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 + \sqrt{15} \\ y = 1 - \sqrt{15} \end{cases}$$

بنابراین مختصات نقاط برخورد دایره با محور y ها به صورت $(0, 1 + \sqrt{15})$ و $(0, 1 - \sqrt{15})$ است.

و در محل برخورد با محور x ها، عرض نقاط صفر است: $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 16 \xrightarrow{y=0} (x+1)^2 + (0-1)^2 = 16$

$$\Rightarrow (x+1)^2 = 15 \Rightarrow \begin{cases} x+1 = \sqrt{15} \\ x+1 = -\sqrt{15} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 + \sqrt{15} \\ x = -1 - \sqrt{15} \end{cases}$$

بنابراین مختصات نقاط برخورد دایره با محور x ها به صورت $(-1 + \sqrt{15}, 0)$ و $(-1 - \sqrt{15}, 0)$ است.

سؤال معادله دایره $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$ را در نظر بگیرید و به پرسش‌های زیر پاسخ دهید.

آ مختصات مرکز دایره و اندازه شعاع دایره را بنویسید.

ب نقاط تقاطع این دایره را با محورهای مختصات پیدا کنید.

پ شکل دایره را رسم کنید.

پاسخ **آ** در دایره به معادله $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$ ، مختصات مرکز دایره $O(1, 3)$ و شعاع دایره

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{(-2)^2 + (-6)^2 - 4(6)} = 2 \text{ است.}$$

ب می‌دانیم که در محل برخورد با محور y ها، طول نقاط برابر صفر است و در محل برخورد با محور x ها، عرض نقاط برابر صفر است.

$$\text{محل برخورد دایره با محور } y \text{ ها: } x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0 \xrightarrow{x=0} (0)^2 + y^2 - 2(0) - 6y + 6 = 0$$

$$\Rightarrow y^2 - 6y + 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 3 + \sqrt{3} \\ y = 3 - \sqrt{3} \end{cases}$$

بنابراین مختصات نقاط برخورد دایره با محور y ها به صورت $(0, 3 + \sqrt{3})$ و $(0, 3 - \sqrt{3})$ است.

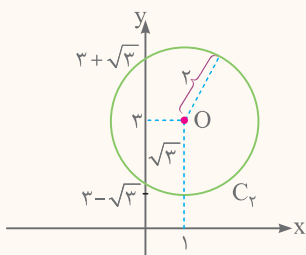
$$\text{محل برخورد دایره با محور } x \text{ ها: } x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0 \xrightarrow{y=0} x^2 + (0)^2 - 2x - 6(0) + 6 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 6 = 0 \xrightarrow{\Delta < 0} \text{ معادله جواب حقیقی ندارد}$$

بنابراین دایره با محور x ها برخورد ندارد.

پ به کمک مختصات مرکز دایره و اندازه شعاع و توجه به مختصات نقاط برخورد دایره با محورهای دستگاه

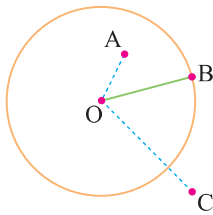
مختصات، نمودار آنها را رسم می‌کنیم:



وضعیت نقطه نسبت به دایره

یک نقطه در صفحه می‌تواند سه حالت مختلف نسبت به دایره داشته باشد، برای بررسی وضعیت نقطه و دایره دو روش داریم:

۱ روش هندسی بررسی وضعیت نقطه و دایره:



در این روش فاصله نقطه تا مرکز دایره را با شعاع مقایسه می‌کنیم، با توجه به شکل رسم شده داریم:

۱ نقطه B روی دایره: در این صورت فاصله نقطه B تا مرکز دایره برابر شعاع دایره است، یعنی $OB = r$

۲ نقطه A درون دایره: در این صورت فاصله نقطه A تا مرکز دایره کمتر از شعاع دایره است، یعنی $OA < r$

۳ نقطه C بیرون دایره: در این صورت فاصله نقطه C تا مرکز دایره بیشتر از شعاع دایره است، یعنی $OC > r$

مثال ! می‌خواهیم وضعیت نقطه $M(1, 0)$ را نسبت به دایره $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 4$ بررسی کنیم:

مرکز دایره داده شده $O(2, -3)$ و شعاع این دایره $r = 2$ است. فاصله OM را با فرمول فاصله دو نقطه $OM = \sqrt{(x_M - x_O)^2 + (y_M - y_O)^2}$

محاسبه می‌کنیم:

$$OM = \sqrt{(1-2)^2 + (0-(-3))^2} = \sqrt{10}$$

چون $r = 2$ و $OM = \sqrt{10}$ پس $OM > r$ است، بنابراین نقطه M بیرون دایره است.

سؤال وضعیت نقطه $A(2, 1)$ را نسبت به دایره $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ بررسی کنید.

پاسخ برای بررسی وضعیت نقطه $A(2, 1)$ نسبت به دایره، ابتدا مختصات مرکز و شعاع دایره را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases} O\left(\frac{-a}{2}, \frac{-b}{2}\right) = (1, -2) \\ r = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{2} \sqrt{(-2)^2 + (4)^2 - 4(-4)} = \frac{1}{2} \sqrt{36} = 3 \end{cases}$$

$$OA = \sqrt{(2-1)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$

حالا فاصله نقطه $A(2, 1)$ را از مرکز $O(1, -2)$ پیدا می‌کنیم:

چون فاصله نقطه A از مرکز O، بیشتر از شعاع دایره است ($OA > r$) پس نقطه A بیرون دایره است.

۲ بررسی وضعیت نقطه و دایره با استفاده از معادله دایره:

اگر معادله دایره $C(O, r)$ به مرکز $O(\alpha, \beta)$ و شعاع r در دستگاه مختصات داده شده باشد، می‌توان وضعیت نقاط مختلف صفحه را نسبت به دایره بررسی کرد:

۱ نقاطی که در معادله $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$ صدق کنند، نقاطی از صفحه هستند که روی دایره قرار دارند.

۲ مجموعه جواب نامعادله $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 < r^2$ نقاطی از صفحه را مشخص می‌کند که درون دایره قرار دارند.

۳ مجموعه جواب نامعادله $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 > r^2$ نقاطی از صفحه را مشخص می‌کند که بیرون دایره قرار دارند.

مثال ! معادله $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 4$ را در نظر بگیرید. وضعیت نقطه $A(1, 1)$ ، $B(0, 3)$ و $C(-2, 4)$ را نسبت به این دایره بررسی می‌کنیم.

بررسی وضعیت نقطه A: نقطه $A(1, 1)$ را در معادله دایره داده شده جای‌گذاری می‌کنیم، یعنی:

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 = 4 \xrightarrow{x=1, y=1} (1+2)^2 + (1-3)^2 = 9 + 4 = 13 > 4$$

پس نقطه A بیرون دایره است.

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 = 4 \xrightarrow{x=0, y=3} (0+2)^2 + (3-3)^2 = 4 + 0 = 4$$

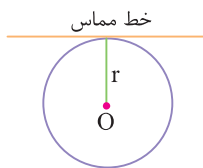
پس نقطه B روی دایره است.

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 = 4 \xrightarrow{x=-2, y=4} (-2+2)^2 + (4-3)^2 = 0 + 1 = 1 < 4$$

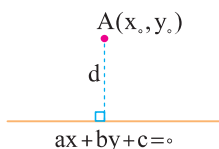
پس نقطه C درون دایره است.

اوضاع نسبی خط و دایره

قبل از بررسی وضعیت خط و دایره نیاز است به یادآوری دو مفهوم مهم از سال قبل بپردازیم:
 ۱ خط مماس در نقطه تماس با دایره، بر شعاع آن دایره عمود است.



۲ فاصله نقطه $A(x_0, y_0)$ از خط به معادله $ax + by + c = 0$ برابر است با:



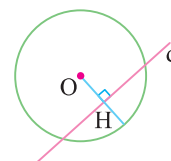
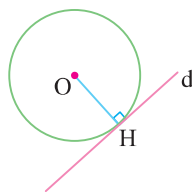
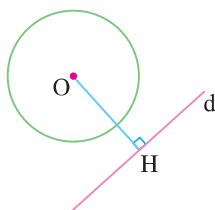
$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

• دایره $C(O, r)$ را در صفحه در نظر بگیرید. خط و دایره می‌توانند یک، یا دو نقطه اشتراک داشته، یا هیچ نقطه اشتراکی نداشته باشند. برای بررسی وضعیت آنها کافی است فاصله مرکز تا خط را محاسبه و با شعاع دایره مقایسه کنید، در این صورت یکی از سه حالت زیر رخ می‌دهد.

۳ اگر خط d ، دایره را قطع نکند، آن‌گاه $OH > r$ است.

۲ اگر خط d بر دایره مماس باشد، آن‌گاه $OH = r$ است.

۱ اگر خط d با دایره متقاطع باشد، آن‌گاه $OH < r$ است.



مثال اوضاع نسبی خط $3x + 4y - 1 = 0$ و دایره به معادله $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 1 = 0$ را بررسی می‌کنیم.

$$x^2 + y^2 - 2x + 6y + 1 = 0$$

ابتدا مرکز و شعاع دایره را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} a = -2 \\ b = 6 \\ c = 1 \end{cases} \quad O\left(\frac{-a}{2}, \frac{-b}{2}\right) = (1, -3) \quad \text{و} \quad r = \frac{1}{2} \sqrt{(-2)^2 + (6)^2 - 4(1)} = \frac{1}{2} \sqrt{36} = 3$$

حالا فاصله مرکز تا خط را پیدا می‌کنیم:

$$OH = \frac{|3(1) + 4(-3) - 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{10}{5} = 2$$

چون $OH = 2$ و $r = 3$ ، پس $OH < r$ است یعنی خط با دایره متقاطع است.

سؤال اوضاع نسبی خط $2y - x = 4$ را نسبت به دایره $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ بررسی کنید.

پاسخ ابتدا مرکز و شعاع دایره را به دست می‌آوریم:

$$x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$$

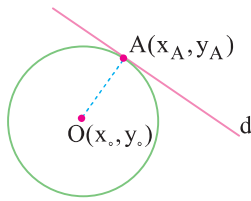
$$\begin{cases} a = -2 \\ b = 0 \\ c = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} O\left(\frac{-a}{2}, \frac{-b}{2}\right) = (1, 0) \\ r = \frac{1}{2} \sqrt{(-2)^2 + (0)^2 - 4(-3)} = \frac{1}{2} \sqrt{16} = 2 \end{cases}$$

اکنون فاصله مرکز دایره را تا خط $2y - x - 4 = 0$ به دست می‌آوریم:

$$OH = \frac{|2(0) - (1) - 4|}{\sqrt{(2)^2 + (-1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

چون $OH = \sqrt{5}$ و $r = 2$ ، پس $OH > r$ است؛ یعنی خط دایره را قطع نمی‌کند.

معادله خط مماس بر دایره

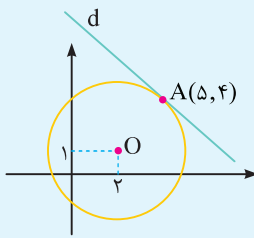


همان طور که دیدیم، یکی از وضعیت‌های خط نسبت به دایره، حالت مماس است. فرض کنید مختصات نقطه $A(x_A, y_A)$ داده شده است و می‌خواهیم معادله خط مماس بر دایره در این نقطه را بنویسیم. برای پیدا کردن شیب خط مماس از عمود بودن آن بر شعاع کمک می‌گیریم، یعنی شیب شعاع OA را محاسبه می‌کنیم و سپس با عکس و قرینه کردن آن به شیب خط مماس می‌رسیم.

$$m_{OA} = \frac{y_o - y_A}{x_o - x_A}, m_d = \frac{-1}{m_{OA}}$$

سپس با استفاده از فرمول $y - y_A = m_d(x - x_A)$ معادله خط را می‌نویسیم.

سؤال اگر بدانیم خط d در نقطه $(5, 4)$ بر دایره‌ای به مرکز $O(2, 1)$ مماس است، معادله خط مماس چیست؟



پاسخ برای به دست آوردن معادله خط مماس بر دایره در نقطه $(5, 4)$ ، ابتدا شیب شعاع OA را به دست می‌آوریم چون شعاع دایره بر خط مماس در این نقطه عمود است، با عکس و قرینه کردن شیب OA ، می‌توانیم به شیب خط مماس برسیم.

$$m_{OA} = \frac{y_o - y_A}{x_o - x_A} = \frac{1 - 4}{2 - 5} = \frac{-3}{-3} = 1 \Rightarrow m_d = -1$$

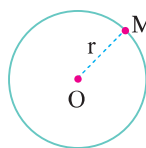
با رابطه $y - y_A = m_d(x - x_A)$ ، معادله خط مماس را به دست می‌آوریم:

$$y - y_A = m_d(x - x_A) \Rightarrow y - 4 = -1(x - 5) \Rightarrow y = -x + 9$$

بنابراین معادله خط مماس بر دایره در نقطه $(5, 4)$ به صورت $y = -x + 9$ است.

نوشتن معادله دایره

• برای نوشتن با توجه به معادله استاندارد دایره که به صورت $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$ است، نیاز به شعاع (r) و مرکز $O(\alpha, \beta)$ داریم. براساس اطلاعات مسئله حالت‌های زیر را بررسی می‌کنیم.



1 مرکز و نقطه‌ای روی دایره را داشته باشیم: به شکل مقابل توجه کنید، برای محاسبه r کافی است طول OM را به دست آورید.

سؤال معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن نقطه $O(3, -2)$ و $M(7, -1)$ نقطه‌ای روی آن باشد.

پاسخ برای نوشتن معادله دایره، نیاز به شعاع (r) و مختصات مرکز دایره $O(\alpha, \beta)$ داریم.

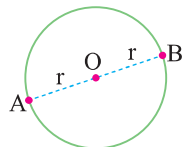
با توجه به اطلاعات سوال، مختصات مرکز دایره $O(3, -2)$ است؛ پس برای نوشتن معادله این دایره، تنها به اندازه شعاع (r) نیاز داریم.

چون نقطه M روی دایره واقع شده است، برای محاسبه r ، طول OM را به دست می‌آوریم:

$$r = OM = \sqrt{(7 - 3)^2 + (-1 - (-2))^2} = \sqrt{16 + 1} = \sqrt{17}$$

بنابراین معادله دایره به صورت $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 17$ است.

2 دو سرقطر دایره را داشته باشیم: به شکل مقابل توجه کنید، در این حالت برای محاسبه مرکز (O) باید مختصات نقطه وسط پاره خط AB را به روش مقابل به دست آورید:



$$O\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

اکنون با داشتن مختصات O می‌توان اندازه OB یا OA را به عنوان شعاع دایره در نظر گرفت.

سؤال معادله دایره‌ای را بنویسید که دو سرقطران $A(3, -2)$ و $B(7, 6)$ باشد.

پاسخ برای محاسبه مختصات مرکز دایره، باید مختصات نقطه وسط پاره خط AB را به دست آوریم:

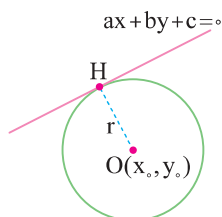
$$O\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right) \Rightarrow O(5, 2)$$

اکنون برای محاسبه مقدار شعاع دایره، اندازه OA را به دست می‌آوریم:

$$r = OA = \sqrt{(5-3)^2 + (2-(-2))^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$$

بنابراین معادله دایره به صورت $(x-5)^2 + (y-2)^2 = 20$ است.

۳ مرکز و معادله خط مماس بر دایره را داشته باشیم: در این حالت برای محاسبه r ، با استفاده از رابطه فاصله نقطه از خط طول OH را به دست می‌آوریم:

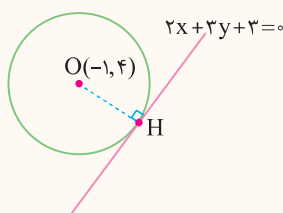


$$OH = r = \frac{|ax_o + by_o + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

سؤال دایره‌ای به مرکز $O(-1, 4)$ بر خط به معادله $2x + 3y + 3 = 0$ مماس است. معادله این دایره را بنویسید.

پاسخ با توجه به اطلاعات سوال، مختصات مرکز دایره $O(-1, 4)$ است؛ پس برای نوشتن معادله این دایره، تنها به اندازه شعاع r احتیاج داریم.

برای محاسبه r ، به کمک رابطه محاسبه فاصله نقطه از خط، طول OH را به دست می‌آوریم:

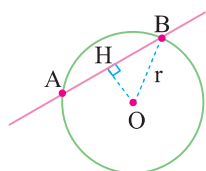


$$r = OH = \frac{|2(-1) + 3(4) + 3|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{13}{\sqrt{13}} = \sqrt{13}$$

بنابراین معادله دایره به صورت $(x+1)^2 + (y-4)^2 = 13$ است.

۴ مرکز دایره، معادله و طول وتر را داشته باشیم: برای یافتن شعاع، عمودی از مرکز دایره به خط رسم می‌کنیم، مثلث

OHB قائم الزویه است. فرض کنید طول وتر AB برابر L باشد، در این صورت قابل اثبات است که: $AH = BH = \frac{L}{2}$



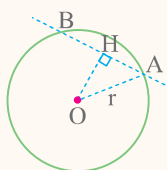
پس می‌توان رابطه فیثاغورس را در این شکل به صورت زیر نوشت:

$$r^2 = OH^2 + BH^2 \xrightarrow{BH = \frac{L}{2}} r = \sqrt{OH^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2}$$

سؤال مرکز دایره‌ای نقطه $O(2, 2)$ است. این دایره روی خط $6x + 8y + 2 = 0$ وتری به طول ۸ جدا می‌کند. معادله این دایره را بنویسید.

پاسخ با توجه به اطلاعات سوال، مختصات مرکز دایره $O(2, 2)$ است؛ پس برای نوشتن معادله این دایره، باید r را محاسبه کنیم.

برای یافتن شعاع عمودی از مرکز دایره بروتر دایره رسم و طول آن را محاسبه می‌کنیم.



$$OH = \frac{|6(2) + 8(2) + 2|}{\sqrt{6^2 + 8^2}} = \frac{30}{10} = 3$$

طول وتر دایره برابر ۸ است، پس $AH = BH = \frac{8}{2} = 4$ است. در مثلث قائم الزویه AOH داریم:

$$r^2 = OH^2 + AH^2 \Rightarrow r^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \Rightarrow r = 5$$

بنابراین معادله دایره به صورت $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 25$ است.

وضعیت دو دایره نسبت به هم

می‌خواهیم وضعیت دو دایره را نسبت به یکدیگر، در صفحه مختصات و با داشتن معادله دو دایره بررسی کنیم.

دو دایره دلخواه $C_1(O_1, r_1)$ و $C_2(O_2, r_2)$ را در نظر بگیرید. در جدول زیر حالت‌های مختلف دو دایره نسبت به هم داده شده و در هر مورد، رابطه بین اندازه شعاع‌های دو دایره با اندازه فاصله بین مرکزهای دو دایره بیان شده است.

پاره خطی که مرکزهای دو دایره را به هم وصل می‌کند، خط‌المرکزین نامیده می‌شود. در اینجا اندازه خط‌المرکزین را با d نمایش داده‌ایم و اگر طول آن را بخواهیم با فرض $O_1(x_1, y_1)$ مرکز دایره اول و $O_2(x_2, y_2)$ مرکز دایره دوم داریم:

$$O_1O_2 = d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

نام وضعیت	دو دایره بیرون هم (متخارج)	دو دایره مماس بیرون	دو دایره متقاطع	دو دایره مماس درون	دو دایره متداخل	دو دایره هم‌مرکز
شکل هندسی						
ارتباط d و r_1, r_2	$d > r_1 + r_2$	$d = r_1 + r_2$	$ r_1 - r_2 < d < r_1 + r_2$	$d = r_1 - r_2 $	$d < r_1 - r_2$	$d = 0$

پس برای بررسی وضعیت دو دایره داده شده در سوالات، باید رابطه بین مجموع و تفاضل شعاع دو دایره و طول خط‌المرکزین آنها را با جدول فوق مقایسه کنیم.

مثال ! وضعیت دو دایره $x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0$ و $x^2 + y^2 + 8y + 12 = 0$ را نسبت به هم مشخص می‌کنیم:

ابتدا مختصات مرکز و طول شعاع هر دایره را پیدا می‌کنیم و سپس با مقایسه مقادیر مجموع و تفاضل شعاع با طول خط‌المرکزین، وضعیت دو دایره را نسبت به هم مشخص می‌کنیم.

$$C_1: x^2 + y^2 + 8y + 12 = 0$$

$$\begin{cases} a=0 \\ b=8 \\ c=12 \end{cases} \quad O_1\left(\frac{-a}{1}, \frac{-b}{1}\right) = (0, -4) \quad \text{و} \quad r_1 = \frac{1}{1}\sqrt{(0)^2 + 8^2 - 4(12)} = \frac{1}{1}\sqrt{16} = 4$$

$$C_2: x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0$$

$$\begin{cases} a=-8 \\ b=6 \\ c=0 \end{cases} \quad O_2\left(\frac{-a}{1}, \frac{-b}{1}\right) = (4, -3) \quad \text{و} \quad r_2 = \frac{1}{1}\sqrt{(-8)^2 + 6^2 - 4(0)} = \frac{1}{1}\sqrt{100} = 10$$

از طرفی طول خط‌المرکزین برابر است با:

$$d = O_1O_2 = \sqrt{(4-0)^2 + (-3-(-4))^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$$

$$5 - 2 < \sqrt{17} < 5 + 2$$

رابطه $r_1 - r_2 < d < r_1 + r_2$ بین شعاع‌ها و خط‌المرکزین برقرار است:

پس این دو دایره متقاطع‌اند.

سؤال وضعیت دو دایره $x^2 + y^2 = 1$ و $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ را نسبت به هم مشخص کنید.

پاسخ ابتدا مرکز و شعاع هر دو دایره را به دست می‌آوریم:

$$C_1 : (x-1)^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} O_1(1,0) \\ r_1 = 1 \end{cases}$$

$$C_2 : x^2 + (y-1)^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} O_2(0,1) \\ r_2 = 1 \end{cases}$$

طول خط‌المركزين برابر است با:

$$d = O_1O_2 = \sqrt{(1-0)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{2}$$

از آنجایی که $1-1 < \sqrt{2} < 1+1$ یعنی $r_1 - r_2 < d < r_1 + r_2$ است، پس دو دایره C_1 و C_2 متقاطع هستند.

سؤال معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O(2,-2)$ بوده و بردایره به معادله $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 4$ مماس خارج باشد.

پاسخ برای نوشتن معادله دایره، نیاز به شعاع r و مختصات مرکز دایره $O(\alpha, \beta)$ داریم.

مختصات مرکز دایره $O_1(2,-2)$ داده شده است؛ پس برای محاسبه r به طریق زیر عمل می‌کنیم:

چون دو دایره مماس خارج اند، بین طول خط‌المركزين و طول شعاع دو دایره رابطه $d = r_1 + r_2$ برقرار است. ابتدا مختصات مرکز دایره O_2 و اندازه شعاع r_2 را به دست می‌آوریم:

$$C_2 : x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$$

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = -4 \\ c = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} O(\frac{-a}{2}, \frac{-b}{2}) = (-1, 2) \\ r = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{2} \sqrt{(2)^2 + (-4)^2 - 4(-4)} = \frac{1}{2} \sqrt{36} = \frac{1}{2} \times 6 = 3 \end{cases}$$

از طرفی طول خط‌المركزين برابر است با:

$$d = O_1O_2 = \sqrt{(-1-2)^2 + (2-(-2))^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

به کمک رابطه $d = r_1 + r_2$ ، اندازه شعاع r_2 برابر $r_2 = 5 - 3 = 2$ است.

بنابراین معادله دایره C_1 به صورت $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 4$ است.

دایره

پرسش‌های تشریحی

درس
۲

● درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

۸۱۳. در معادله دایره $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ مرکز دایره $O(-1,-1)$ است.

۸۱۴. معادله $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ معادله یک دایره است اگر و تنها اگر رابطه $a^2 + b^2 - 4c < 0$ برقرار باشد.

۸۱۵. اگر فاصله نقطه M تا مرکز دایره، کمتر از طول شعاع باشد، نقطه M درون دایره است.

۸۱۶. نقطه $(3,-2)$ روی دایره $x^2 + y^2 + 2x = 0$ قرار دارد.

۸۱۷. مجموعه جواب نامعادله $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 > r^2$ نقاطی از صفحه را مشخص می‌کند که درون دایره قرار دارند.

۸۱۸. اگر فاصله مرکز دایره تا خط d برابر شعاع باشد، خط d و دایره در نقطه مشترک هستند.

۸۱۹. دو دایره $C_1(O_1, r_1)$ و $C_2(O_2, r_2)$ مفروض هستند. اگر $|r_1 - r_2| < |O_1O_2| < r_1 + r_2$ باشد دو دایره مماس درون هستند.

۸۲۰. دو دایره با شعاع‌های r و r' و اندازه خط‌المركزين d متقاطع اند هرگاه $d < r + r'$ باشد.

● جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید.

۸۲۱. شعاع دایره‌ای به معادله $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ برابر است.

۸۲۲. در دایره $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 4$ ، مرکز آن و شعاع آن است.

(شهریور ۱۴۰۰)

(خرداد ۱۴۰۰)

(دی ۹۸ خراج)

(دی ۹۸ خارج)

(خرداد ۱۴۰۰ خارج)

(دی ۹۷ خارج)

۸۲۳. پاره خطی که مرکزهای دو دایره را به هم وصل می کند نامیده می شود.

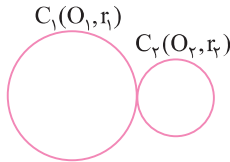
۸۲۴. اگر خط مرکزین دو دایره برابر صفر باشد، آنگاه آن دو دایره هستند.

۸۲۵. اگر دو دایره با شعاع های r و r' و خط مرکزین d رابطه $d = |r - r'|$ برقرار باشد، آن دو دایره هستند.

۸۲۶. در دایره $x^2 + y^2 - 2x = 0$ مختصات مرکز آن است.

۸۲۷. فاصله نقطه مرکز دایره تا خط مماس بر دایره برابر با دایره است.

۸۲۸. در شکل مقابل بین خط مرکزین d و شعاع ها رابطه برقرار است.



مسائل

معادله دایره و ویژگی های آن

مهم ترین موضوعی که لازمه توی سؤالات دایره بلد باشید، پیدا کردن مرکز و شعاع دایره، با داشتن معادله استاندارد و معادله گسترده دایره است.

۸۲۹. معادله دایره ای به صورت $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0$ است. مرکز و شعاع دایره را بنویسید.

۸۳۰. مختصات مرکز و اندازه شعاع هریک از دایره های زیر را پیدا کنید و آن ها را در دستگاه مختصات رسم کنید.

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 4 \quad \text{[آ]} \quad x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0 \quad \text{[ب]}$$

۸۳۱. معادله گسترده یک دایره به شکل $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 8 = 0$ است. مختصات مرکز دایره و اندازه شعاع آن را پیدا کنید و معادله آن را به شکل استاندارد بنویسید.

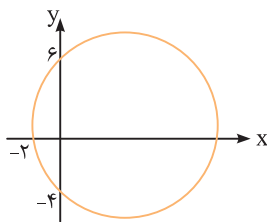
۸۳۲. در دایره C به معادله $x^2 + y^2 + ax - 8y + c = 0$ ، طول مرکز برابر ۳ و شعاع دایره ۴ است. مقادیر a و c را پیدا کنید.

۸۳۳. مرکز دایره به معادله $x^2 + y^2 + ax - 6y - 12 = 0$ روی خط $2x - y - 1 = 0$ قرار دارد. مقدار a و طول شعاع را بیابید.

۸۳۴. اگر معادله $x^2 + y^2 - 2x + 6y + k = 0$ مربوط به یک دایره باشد، مقادیر k را بیابید.

۸۳۵. در دایره به معادله $(x+1)^2 + y^2 = 4$ مختصات نقاط تقاطع این دایره با محورهای مختصات پیدا کنید.

۸۳۶. 21! دایره به معادله $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ به صورت مقابل است. مقادیر a ، b و c را بیابید.



۸۳۷. 21! توضیح دهید چه نقاطی در نامعادله $x^2 + y^2 - 10x + 2y - 2 < 0$ صدق می کنند.

در سؤالات زیر، می خواهیم با کمک اطلاعاتی که در صورت سؤال داده شده، معادله دایره را بنویسیم. طراح آزمون ها، به این سؤالات خیلی علاقه مند هستند.

۸۳۸. معادله دایره ای را بنویسید که نقطه $O(-2, 3)$ مرکز آن و $M(1, -1)$ یک نقطه از آن باشد.

۸۳۹. معادله دایره ای را بنویسید که نقاط $A(4, -1)$ و $B(-2, 1)$ دو سرقطری از آن باشند.

۸۴۰. معادله دایره ای را بنویسید که با دایره $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 12 = 0$ هم مرکز باشد و شعاع آن، دو برابر شعاع این دایره باشد.

۸۴۱. 21! معادله دایره ای را بنویسید که مختصات مرکز دایره به شکل $(x, 2x)$ باشد و این دایره از نقاط $(4, 1)$ ، $(-2, 3)$ عبور کند.

۸۴۲. معادله دایره ای را بنویسید که از نقاط $A(-1, 2)$ و $B(3, 2)$ می گذرد و مرکز آن روی خط $y = x + 2$ قرار دارد.

۱۴۳۳ اگر نقاط $A(0,6)$ ، $B(-4,0)$ و $C(1,5)$ سه نقطه از یک شهر باشند، دکل مخابراتی را در کدام نقطه باید نصب کرد که سرویس دهی یکسانی به هر سه نقطه انجام شود؟

(کتاب راهنمای معلم ریاضی ۳)

۱۴۴ دایره‌ای به مرکز $(-1,2)$ بر خط $4y - 3x - 1 = 0$ مماس است.

آ شعاع این دایره چقدر است؟

ب معادله این دایره را بنویسید.

(خرداد ۱۴۰۴)

۱۴۵ معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن نقطه $(1,-2)$ بوده و بر خط $4x - 3y = 25$ مماس باشد.

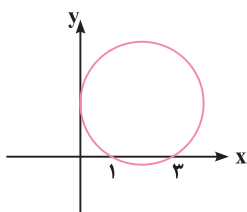
۱۴۶ معادله دایره‌ای را بنویسید که خطوط $x + y = 1$ و $x - y = 3$ معادله دو قطر آن بوده و خط $4x + 3y = -5$ بر آن مماس باشد.

۱۴۷ معادله دایره‌ای را بنویسید که بر دو خط $y = 1$ و $y = 9$ مماس است و مرکز آن روی محور y قرار دارد.

۱۴۸ دایره C به مرکز $M(a,3)$ و شعاع ۵ بر محور y مماس است. مقدار a را پیدا کنید.

۱۴۹ دایره $r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2$ بر هر دو محورهای مختصات در ناحیه اول مماس است و مرکز آن روی خط $2x + y = 6$ قرار دارد. مقادیر a ، b و r را پیدا کنید.

۱۵۰ دایره مقابل بر محور y مماس است. مختصات مرکز این دایره را بیابید.



وضعیت نقطه و خط نسبت به دایره و وضعیت نسبی دو دایره

سرنخ در این سؤالات، مرکز و شعاع دایره رو پیدا کنید. بعدش، فاصله نقطه مورد نظر تا مرکز دایره رو پیدا کنید و اون رو با شعاع مقایسه کنید.

(خرداد ۱۴۰۱)

۱۵۱ کدام یک از نقاط زیر روی محیط دایره به معادله $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ قرار دارد؟

(۰,۰) (۱) (۱,۰) (۲) (۰,-۱) (۳) (-۱,۰) (۴)

(شهریور ۱۴۰۱)

۱۵۲ معادله گسترده دایره‌ای به صورت $x^2 + y^2 + 2y - 4x - 4 = 0$ است:

آ مختصات مرکز و شعاع دایره C را محاسبه کنید.

ب آیا نقطه $A(0,3)$ روی محیط دایره C قرار دارد؟ چرا؟

(شهریور ۹۸ خارج)

۱۵۳ وضعیت نقطه $(-1,-2)$ را نسبت به دایره $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ مشخص کنید و مرکز دایره را به دست آورید.

۱۵۴ نقطه $P(-2,k)$ بیرون دایره $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$ قرار دارد. مقادیر k را بیابید.

سرنخ در سؤال‌های زیر، می‌خواهیم وضعیت نسبی یک خط را نسبت به دایره بررسی کنیم. در این سؤالات باید فاصله مرکز دایره را تا خط پیدا کنیم.

(دی ۹۸)

۱۵۵ وضعیت دایره $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 4$ و خط $y = -1$ را نسبت به هم مشخص کنید.

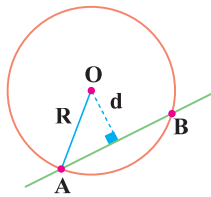
۱۵۶ وضعیت دایره به معادله $x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$ را با خط‌های زیر تعیین کنید.

آ $3x + 4y = 0$ **ب** $x + y = 7$

سرنخ وقتی خط و دایره در دو نقطه متقاطع اند، دایره روی خط یک وتر جدا می‌کند. برای پیدا کردن طول وتر از رابطه فیثاغورس استفاده کنید.

۱۵۷ خط $x - y + 2 = 0$ و دایره $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 3 = 0$ در دو نقطه A و B متقاطع اند. فاصله دو نقطه A و B را بیابید.

۱۵۸ معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O(0,1)$ و روی خط $3x + 4y + 6 = 0$ وتری به طول $2\sqrt{5}$ جدا کند، سپس محل تلاقی آن دایره با محور y ها را بیابید.



۸۵۹. مرکز دایره‌ای نقطه $O(2, -3)$ است. این دایره روی خط $3x - 4y + 2 = 0$ وتر AB را به طول ۶ جدا می‌کند.

(کاردرکلاس کتاب درسی)

معادله این دایره را بنویسید.

۸۶۰. معادله دایره‌ای را بنویسید که خط‌های $x + y = 1$ و $x - y = 3$ شامل قطرهایی از آن باشند و روی خط به معادله $x + y = 2$ وتری به طول

$2\sqrt{2}$ ایجاد می‌کند.

در سؤال‌های زیر، خط و دایره در یک نقطه بر هم مماس‌اند و نقطه تماس را می‌خواهیم. یادتون باشه: «در نقطه تماس، شعاع بر خط مماس عمود است.»

۸۶۱. در نقطه $A(2, 3)$ روی دایره به معادله $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 3$ مماسی بردایره رسم کرده‌ایم، معادله این خط مماس را به دست آورید.

۸۶۲. اگر خط d در نقطه $A(-1, 3)$ بردایره‌ای به مرکز $(0, 2)$ مماس باشد:

ا) معادله خط مماس را پیدا کنید.

ب) معادله دایره را بنویسید.

۸۶۳. خط به معادله $x - 2y + 5 = 0$ در چه نقطه‌ای بردایره $x^2 + y^2 = 5$ مماس است؟

در سؤال‌ات تعیین وضعیت دو دایره، اول لازمه شعاع‌ها و مرکزهای دو دایره رو پیدا کنید. بعد فاصله دو مرکز رو پیدا کنید و با مجموع و تفاضل شعاع‌ها مقایسه کنید.

۸۶۴. وضعیت دو دایره به معادلات $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 1$ و $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ را نسبت به هم مشخص کنید. (دی ۱۴۰۳)

(مشابه تمرین کتاب درسی)

۸۶۵. مشخص کنید دو دایره زیر نسبت به هم چه وضعی دارند؟

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y = 4 \quad \text{و} \quad x^2 + y^2 + 2x - 4y = 11$$

۸۶۶. دایره‌ای به معادله $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ و دایره دیگری به مرکز $(-1, 2)$ و شعاع یک را در نظر بگیرید. وضعیت این دو دایره نسبت به هم را

(خرداد ۱۴۰۰ خارج)

مشخص کنید.

۸۶۷. وضعیت دایره به معادله $x^2 + y^2 - 6x + 12y + 20 = 0$ ، نسبت به دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۳ واحد را مشخص کنید. (خرداد ۱۴۰۳)

(تمرین کتاب درسی)

۸۶۸. معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $(-1, -1)$ بوده و با دایره $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 3$ مماس درون باشد.

(هندسه، دی ۱۴۰۲)

۸۶۹. معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O(0, 1)$ بوده و با دایره $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 16$ مماس داخل باشد.

۸۷۰. معادله دایره‌ای را بنویسید که $(8, 0)$ مرکز آن است و با دایره $x^2 + y^2 - 6x = 0$ مماس خارج است.

۸۷۱. اگر دو دایره به معادله‌های $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$ و $(x-2)^2 + (y+1)^2 = m^2$ مماس خارج باشد، مقدار m را بیابید. (خرداد ۱۴۰۲)

(هندسه خرداد ۱۴۰۲)

۸۷۲. مقدار c را چنان بیابید که دایره $x^2 + y^2 - 2x + 2y + c = 0$ با دایره $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 2$ مماس بیرون باشد.

۸۷۳. مقدار m را چنان تعیین کنید که دایره C به معادله $x^2 + y^2 + 2x - 2y + m = 0$ با دایره C' به مرکز $O(2, -3)$ و شعاع ۳، مماس بیرون باشد.

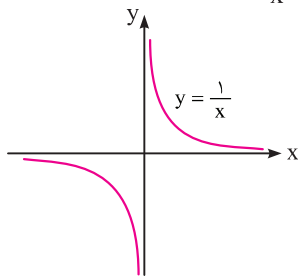
(هندسه شهریور ۱۴۰۳)

۱۷۹ | نادرست

توضیح: دامنه $(f^{-1} \circ f)(x)$ ، دامنه $f(x)$ است و دامنه $f \circ f^{-1}(x)$ ، دامنه $f^{-1}(x)$ است که همان بُرد f است. بنابراین وقتی $(f \circ f^{-1})(x) = f^{-1} \circ f(x)$ است که $D_f = R_f$ باشد. (البته واضح است که تابع f باید وارون‌پذیر باشد.)

۱۸۰ | نادرست

توضیح: هر تابع وارون‌پذیر، یک‌به‌یک است، اما الزامی نیست تابع یک‌به‌یک، اکیداً یکنوا باشد، مثل تابع $y = \frac{1}{x}$ که یک‌به‌یک و وارون‌پذیر است، اما غیر یکنوا است.



۱۸۱ | درست

توضیح: اگر $f^{-1}(12) = 9$ باشد، باید $f(9) = 12$ باشد: چون $f(9) = 12$ است، پس $f^{-1}(12) = 9$ است.

۱۸۲ | درست

توضیح: اگر وارون تابع $y = x^3 + x$ از $(2, 1)$ عبور کند، خود تابع باید از $(1, 2)$ عبور کند. چون در تابع $y = x^3 + x$ ، به ازای $x = 1$ ، مقدار y برابر ۲ به دست می‌آید، پس عبارت، درست است.

۱۸۳ | درست

توضیح: می‌دانیم اگر $(2, 4) \in f$ باشد، آن‌گاه $(4, 2) \in f^{-1}$ است. همچنین اگر $(4, 1) \in g$ باشد، آن‌گاه $(1, 4) \in g^{-1}$ است. اکنون حاصل $f^{-1} \circ g^{-1}(1) = f^{-1}(g^{-1}(1)) = f^{-1}(4) = 2$

۱۸۴ | درست

توضیح: می‌دانیم که $(f^{-1})^{-1}(x) = f(x)$ است.

۱۸۵ | نادرست

توضیح: مثلاً در حالت‌های زیر، دو تابع $(f \circ g)(x)$ و $(g \circ f)(x)$ برابر هستند. (۱) دو تابع f و g برابر باشند. (۲) f و g وارون یکدیگر باشند. (۳) f یا g ، توابعی تهی باشند.

۱۸۶ | درست

توضیح: می‌دانیم $(f \circ g^{-1})(2) = f(g^{-1}(2))$ است. از طرفی چون $(1, 2) \in g$ پس $(2, 1) \in g^{-1}$ است، یعنی $g^{-1}(2) = 1$ است. بنابراین: $f(g^{-1}(2)) = f(1) = 3$

پس نقطه $(1, 2)$ روی $y = f(x)$ قرار دارد.

حال نقطه متناظر آن را بر روی تابع $y = \frac{1}{4} f(x - 2)$ به دست می‌آوریم. برای این منظور، ۲ واحد به طول نقطه اضافه می‌کنیم و سپس عرض آن را نصف می‌کنیم تا به نقطه $(3, \frac{3}{4})$ برسیم.

۱۷۲ | ابتدا تابع f را با استفاده از اتحاد مکعب دوجمله‌ای به صورت زیر می‌نویسیم:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 5 = (x - 2)^3 + 3$$

نقطه متناظر $(1, 2)$ در تابع $y = x^3$ ، نقطه $(1, 1)$ است. حال برای یافتن نقطه متناظر آن بر روی تابع $f(x)$ ، طول نقطه را دو واحد بیشتر و عرض نقطه را نیز سه واحد بیشتر می‌کنیم تا به نقطه $(3, 4)$ برسیم.

۱۷۳ | درست

توضیح: با توجه به تابع g ، می‌دانیم $g(1) = 5$ است، بنابراین داریم: $g(1) = 5 \Leftrightarrow g^{-1}(5) = 1$

۱۷۴ | درست

توضیح: داریم:

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = -\frac{2g(x) + 6}{y} = -\frac{2(\frac{-y}{2}x - 3) + 6}{y} = x$$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = \frac{-y}{2}f(x) - 3 = \frac{-y}{2}(-\frac{2x + 6}{y}) - 3 = x$$

بنابراین دو تابع f و g وارون یکدیگرند.

۱۷۵ | درست

توضیح: داریم: $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = g^3(x) = (\sqrt[3]{x})^3 = x$
 $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt[3]{f(x)} = \sqrt[3]{x^3} = x$

بنابراین دو تابع f و g وارون یکدیگرند.

۱۷۶ | نادرست

توضیح: نمودار تابع و وارون آن نسبت به نیمساز ربع اول و سوم قرینه‌اند.

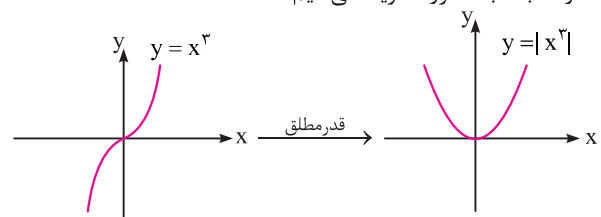
۱۷۷ | نادرست

توضیح: توابعی خطی با شیب صفر (توابع ثابت)، غیر یک‌به‌یک و وارون‌ناپذیراند.

۱۷۸ | نادرست

توضیح: شرط وارون‌پذیری، یک‌به‌یک بودن است. برای تشخیص یک‌به‌یک بودن، $y = |x^3|$ را رسم می‌کنیم.

برای این کار، ابتدا $y = x^3$ را رسم می‌کنیم و سپس قسمت‌های زیر محور x ها را نسبت به محور x قرینه می‌کنیم:



تابع $y = |x^3|$ یک‌به‌یک نیست و در نتیجه وارون‌پذیر نیست.

۱۸۷ | ۲

توضیح: می‌دانیم در توابع وارون پذیر اگر $f(a) = b$ ، آن‌گاه $f^{-1}(b) = a$ و برعکس.

بنابراین می‌توانیم به جای محاسبه $f^{-1}(3) = a$ ، حاصل $f(a) = 3$ را به دست آوریم:

$$f(a) = 3 \xrightarrow{(2,3) \in f} a = 2$$

۱۸۸ | ۲

توضیح: با فرض $f^{-1}(15) = a$ نتیجه می‌گیریم $f(a) = 15$ است، پس:

$$2a^3 - 1 = 15 \Rightarrow 2a^3 = 16 \Rightarrow a^3 = 8 \Rightarrow a = 2$$

پس $f^{-1}(15) = 2$ است.

۱۸۹ | $x^2; x \geq 0$

توضیح: برای محاسبه وارون تابع، باید x را در یک طرف ضابطه تابع تنها کنیم، سپس جای x و y را عوض می‌کنیم:

$$y = \sqrt{x} \Rightarrow y^2 = x \xrightarrow{\text{تعویض جای } x, y} y = x^2$$

$$D_{y^{-1}} = R_y = [0, +\infty)$$

۱۹۰ | $y = \sqrt[3]{x}$

توضیح: برای محاسبه ضابطه تابع وارون، باید x را در یک طرف ضابطه تابع تنها کنیم، سپس جای x و y را عوض می‌کنیم:

$$y = x^3 \Rightarrow \sqrt[3]{y} = x \xrightarrow{\text{تعویض جای } x, y} y = \sqrt[3]{x}$$

۱۹۱ | D_f

۱۹۲ | ۵

توضیح: می‌دانیم اگر f تابعی وارون پذیر و f^{-1} وارون آن باشد، همواره $f^{-1} \circ f(x) = x$ و $f \circ f^{-1}(x) = x$ است. بنابراین حاصل $f \circ f^{-1}(5) = 5$ است.

۱۹۳ | $\{(2,2), (4,4), (6,6)\}$

توضیح: می‌دانیم $(f \circ f^{-1})(x) = x$ به شرطی که x عضو دامنه تابع f^{-1} یا همان بُرد تابع f باشد؛ چون بُرد تابع f برابر $\{2, 4, 6\}$ است، پس:

$$f \circ f^{-1} = \{(2,2), (4,4), (6,6)\}$$

۱۹۴ | ۱

توضیح: ابتدا $f^{-1}(0)$ را پیدا می‌کنیم:

$$f(x) = 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow f^{-1}(0) = 2$$

حالا $g^{-1}(f^{-1}(0)) = g^{-1}(2)$ یعنی $g^{-1}(2)$ را پیدا می‌کنیم:

$$g(x) = x^3 + x = 2 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow g^{-1}(2) = 1$$

بنابراین $(g^{-1} \circ f^{-1})(0) = 1$ است.

۱۹۵ | ۴

توضیح: می‌دانیم در توابع وارون پذیر، اگر $h(a) = b$ ، آن‌گاه $h^{-1}(b) = a$ و برعکس.

بنابراین می‌توانیم به جای محاسبه $(f \circ g)^{-1}(5) = a$ ، حاصل $f \circ g(a) = 5$ را به دست آوریم. ابتدا ضابطه تابع $f \circ g(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = \frac{1}{\lambda} g(x) - 3 = \frac{1}{\lambda} x^3 - 3$$

اکنون حاصل $f \circ g(a) = 5$ را به دست می‌آوریم.

$$f \circ g(a) = 5 \Rightarrow \frac{1}{\lambda} a^3 - 3 = 5 \Rightarrow \frac{1}{\lambda} a^3 = 8 \Rightarrow a^3 = 64 \Rightarrow a = 4$$

۱۹۶ | $y = x$

توضیح: اگر دو تابع f و g وارون یکدیگر باشند، ترکیب آن‌ها برابر تابع همانی $(y = x)$ است.

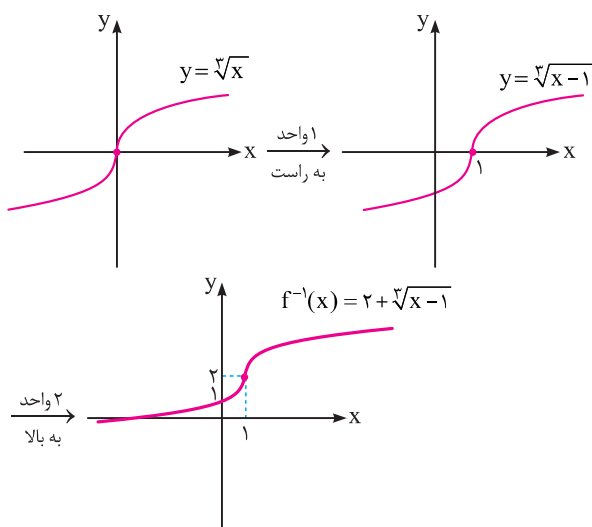
۱۹۷ | چهارم

توضیح: ضابطه وارون تابع $f(x) = (x-2)^3 + 1$ را به دست می‌آوریم:

$$y = (x-2)^3 + 1 \Rightarrow (x-2)^3 = y-1 \xrightarrow{\sqrt[3]{}} x-2 = \sqrt[3]{y-1}$$

$$\Rightarrow x = 2 + \sqrt[3]{y-1} \xrightarrow{\text{تعویض جای } x \text{ و } y} f^{-1}(x) = 2 + \sqrt[3]{x-1}$$

نمودار تابع f^{-1} را با کمک انتقال $y = \sqrt[3]{x}$ به دست می‌آوریم:



۱۹۸ | در توابع وارون پذیر، اگر $f(a) = b$ باشد، آن‌گاه $f^{-1}(b) = a$ است و برعکس؛ بنابراین داریم:

$$f^{-1}(-4) = a \Leftrightarrow f(a) = -4 \xrightarrow{\text{به کمک نمودار}} a = -3$$

$$f^{-1}(-2) = b \Leftrightarrow f(b) = -2 \xrightarrow{\text{به کمک نمودار}} b = -1$$

$$f^{-1}(2) = c \Leftrightarrow f(c) = 2 \xrightarrow{\text{به کمک نمودار}} c = 1$$

$$f^{-1}(3) = d \Leftrightarrow f(d) = 3 \xrightarrow{\text{به کمک نمودار}} d = 3$$

با توجه به نمودار، دامنه و برد توابع f و f^{-1} به صورت زیر است:

$$D_f = R_{f^{-1}} = [2, +\infty) \text{ و } R_f = D_{f^{-1}} = [2, +\infty)$$

حال ضابطه f^{-1} را محاسبه می‌کنیم:

$$f(x) = \sqrt{x-2} + 2 \Rightarrow y = \sqrt{x-2} + 2 \Rightarrow y-2 = \sqrt{x-2}$$

$$\Rightarrow (y-2)^2 = x-2 \Rightarrow x = (y-2)^2 + 2$$

$$\xrightarrow{\text{تعویض جای } y, x} y = (x-2)^2 + 2 \Rightarrow f^{-1}(x) = (x-2)^2 + 2$$

۲۵۲ ابتدا ضابطه تابع $y = x^2 - 2x + 2$ را به صورت $y = (x-1)^2 + 1$ ساده می‌کنیم. نمودار تابع $y = (x-1)^2 + 1$ نشان می‌دهد که این تابع یک به یک نیست، اما می‌توانیم با محدود کردن دامنه این تابع آن را طوری محدود کنیم که تابعی یک به یک به دست آید.



$$y = (x-1)^2 + 1; x \in \mathbb{R}$$

$$x \leq 1$$

$$x \geq 1$$

تابع در هر یک از بازه‌های $(-\infty, 1]$ و $[1, +\infty)$ یک به یک و وارون پذیر است.

مثلاً دامنه تابع f را به بازه $(-\infty, 1]$ محدود می‌کنیم. ضابطه تابع جدید به آن را $f(x)$ می‌نامیم، دامنه تابع f بازه $(-\infty, 1]$ است. در تابع f ابتدا x را بر حسب y به دست می‌آوریم:

$$f(x) = (x-1)^2 + 1 \Rightarrow y = (x-1)^2 + 1 \Rightarrow y-1 = (x-1)^2$$

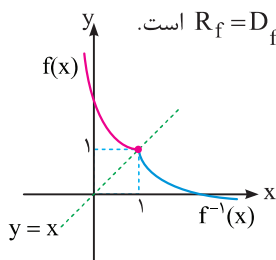
$$\Rightarrow \sqrt{y-1} = |x-1| \xrightarrow{x \leq 1} \sqrt{y-1} = -(x-1)$$

$$\Rightarrow -\sqrt{y-1} = x-1 \Rightarrow x = -\sqrt{y-1} + 1$$

$$\xrightarrow{\text{تعویض جای } y, x} y = -\sqrt{x-1} + 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = -\sqrt{x-1} + 1$$

نمودار تابع f و f^{-1} به صورت زیر است:

با توجه به نمودار تابع:



به جز بازه $(-\infty, 1]$ می‌توانستیم بازه $[1, +\infty)$ را نیز در نظر بگیریم.

۲۵۳ برای محاسبه ضابطه تابع وارون، باید ابتدا x را در یک طرف

ضابطه تابع تنها کنیم. سپس جای x, y را عوض می‌کنیم:

$$f(x) = -(x-2)^2 \Rightarrow y = -(x-2)^2 \Rightarrow -y = (x-2)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{-y} = |x-2| \xrightarrow{x \leq 2} \sqrt{-y} = -(x-2)$$

$$\Rightarrow -\sqrt{-y} = x-2 \Rightarrow 2-\sqrt{-y} = x$$

$$\xrightarrow{\text{تعویض جای } y, x} y = 2-\sqrt{-x} \Rightarrow f^{-1}(x) = 2-\sqrt{-x}$$

۱۹۹ باید بررسی کنیم که ترکیب دو تابع f و g برابر تابع همانی شود؛ داریم:

$$\text{آ)} f(g(x)) = \frac{-\lambda g(x) + 3}{2} = \frac{-\lambda(\frac{3-2x}{\lambda}) + 3}{2} = x$$

$$g(f(x)) = \frac{3-2f(x)}{\lambda} = \frac{3-2(\frac{-\lambda x + 3}{2})}{\lambda} = x$$

بنابراین توابع f و g وارون یکدیگرند.

$$\text{ب)} f \circ g(x) = f(g(x)) = -\sqrt{g(x)-\lambda} = -\sqrt{\lambda+x^2-\lambda} = -\sqrt{x^2}$$

$$-|x| \xrightarrow{x \leq 0} f \circ g(x) = -(-x) = x$$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = \lambda + f^2(x) = \lambda + (-\sqrt{x-\lambda})^2 = x$$

بنابراین توابع f و g وارون یکدیگرند.

$$\text{پ)} f \circ g(x) = f(g(x)) = \frac{1}{g(x)} + 3 = \frac{1}{\frac{1}{x-3}} + 3 = x$$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = \frac{1}{f(x)-3} = \frac{1}{\frac{1}{x} + 3 - 3} = x$$

بنابراین توابع f و g وارون یکدیگرند.

۲۵۰ برای محاسبه تابع وارون، باید x را در یک طرف ضابطه تابع تنها کنیم.

سپس جای x و y را عوض می‌کنیم.

$$\text{آ)} y = \frac{-3x-4}{5} \Rightarrow 5y = -3x-4 \Rightarrow -3x = 5y+4$$

$$\Rightarrow x = \frac{5y+4}{-3} \xrightarrow{\text{تعویض جای } y, x} y = \frac{5x+4}{-3} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{5x+4}{-3}$$

$$\text{ب)} y = \sqrt[3]{x} + 2 \Rightarrow y-2 = \sqrt[3]{x} \xrightarrow{\text{توان ۳}} (y-2)^3 = x$$

$$\xrightarrow{\text{تعویض جای } y, x} y = (x-2)^3 \Rightarrow f^{-1}(x) = (x-2)^3$$

$$\text{پ)} y = 3 - \sqrt{2x+5} \Rightarrow y-3 = -\sqrt{2x+5}$$

$$\Rightarrow 3-y = \sqrt{2x+5} \xrightarrow{\text{توان ۲}} (3-y)^2 = 2x+5$$

$$\Rightarrow (3-y)^2 - 5 = 2x \Rightarrow x = \frac{(3-y)^2 - 5}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{تعویض جای } y, x} y = \frac{(3-x)^2 - 5}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{(3-x)^2 - 5}{2}$$

$$\text{ت)} y = (x-2)^3 + 1 \Rightarrow y-1 = (x-2)^3$$

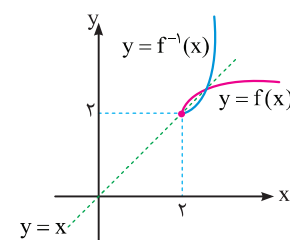
$$\Rightarrow \sqrt[3]{y-1} = x-2 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y-1} + 2$$

$$\xrightarrow{\text{تعویض جای } y, x} y = \sqrt[3]{x-1} + 2 \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1} + 2$$

$$\text{ث)} y = \frac{x-1}{2x+5} \Rightarrow x-1 = 2xy+5y$$

$$\Rightarrow x-2xy = 5y+1 \Rightarrow x(1-2y) = 5y+1$$

$$\Rightarrow x = \frac{5y+1}{1-2y} \xrightarrow{\text{تعویض جای } y, x} y = \frac{5x+1}{1-2x} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{5x+1}{1-2x}$$



۲۵۱ ابتدا تابع $y = f(x)$

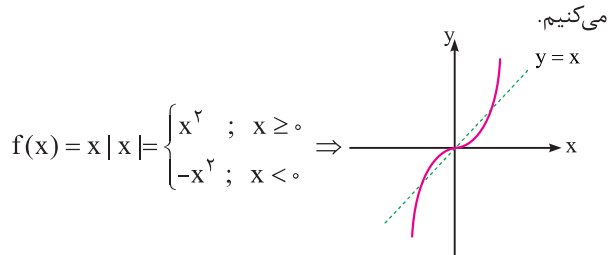
را رسم می‌کنیم. برای رسم تابع

$f^{-1}(x)$ کافی است نمودار تابع

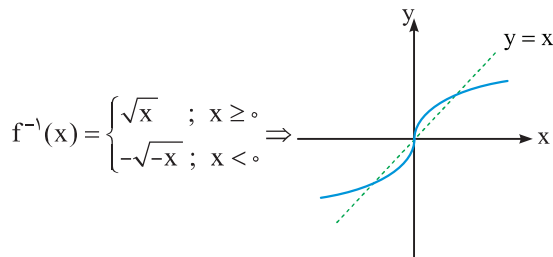
$y = f(x)$ را نسبت به خط

$y = x$ قرینه کنیم:

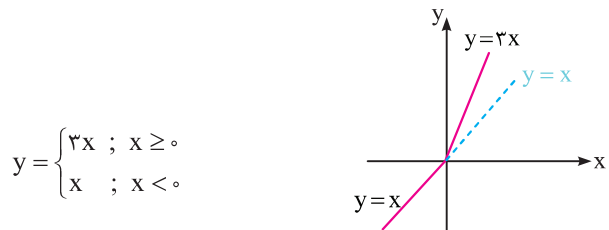
۲۰۷ | ابتدا تابع $f(x)$ را به صورت چند ضابطه نوشته و آن را رسم می‌کنیم.



برای رسم تابع $y = f^{-1}(x)$ ، کافی است که نمودار تابع $y = f(x)$ را نسبت به خط $y = x$ قرینه کنیم:



۲۰۸ | ابتدا تابع را در ریشه قدرمطلق به صورت ۲ ضابطه‌ای می‌نویسیم:

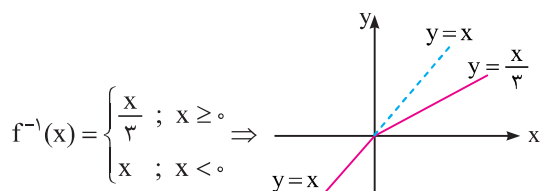


حالا هر ضابطه را جداگانه وارون می‌کنیم. برای این کار، x را برحسب y به دست می‌آوریم:

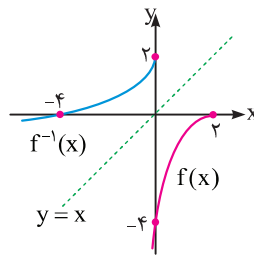
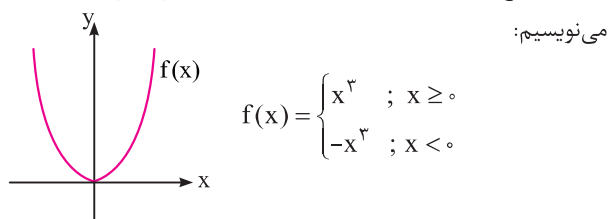
$$1) \ y = 3x; x \geq 0 \Rightarrow x = \frac{y}{3} \xrightarrow{\text{جای } x \text{ و } y \text{ عوض}} y = \frac{x}{3} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x}{3}, D_{f^{-1}} = R_f = [0, +\infty)$$

$$2) \ y = x; x < 0 \Rightarrow x = y \xrightarrow{\text{جای } x \text{ و } y \text{ عوض}} y = x \Rightarrow f^{-1}(x) = x, D_{f^{-1}} = R_f = (-\infty, 0)$$

بنابراین ضابطه تابع f^{-1} برابر است با:



۲۰۹ | تابع $f(x) = x^2\sqrt{x^2} = x^2|x|$ را به صورت چند ضابطه‌ای می‌نویسیم:



اکنون با رسم تابع $f^{-1}(x), f(x)$ دامنه و برد این دو تابع را به دست می‌آوریم:

$$D_f = R_{f^{-1}} = (-\infty, 2]$$

$$R_f = D_{f^{-1}} = (-\infty, 0]$$

۲۰۴ | نقطه $(0, 1) \in f^{-1}$ است، پس $(1, 0) \in f$ است. یعنی $f(1) = 0$ است؛ داریم:

$$f(1) = 0 \Rightarrow \frac{-3(1) + k}{2} = 0 \Rightarrow -3 + k = 0 \Rightarrow k = 3$$

بنابراین ضابطه تابع f به صورت $f(x) = \frac{-3x + 3}{2}$ است.

می‌دانیم در توابع وارون‌پذیر، اگر $f(a) = b$ باشد، آن‌گاه $f^{-1}(b) = a$ است و برعکس. پس می‌توانیم به جای محاسبه $f^{-1}(2) = a$ ، $f(a) = 2$ را به دست آوریم:

$$f(a) = 2 \Rightarrow \frac{-3a + 3}{2} = 2 \Rightarrow -3a + 3 = 4 \Rightarrow -3a = 1 \Rightarrow a = -\frac{1}{3}$$

۲۰۵ | برای این‌که یک تابع نسبت به خط $y = x$ قرینه شود، باید ضابطه وارون آن را به دست آوریم.

برای پیدا کردن $f^{-1}(x)$ ، در رابطه $f(x) = \frac{x-3}{2}$ ، x را برحسب y پیدا می‌کنیم و سپس جای x و y را عوض می‌کنیم:

$$f(x) = y = \frac{x-3}{2} \Rightarrow x-3 = 2y \Rightarrow x = 2y+3$$

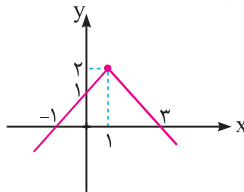
$$\xrightarrow{\text{جای } x \text{ و } y \text{ عوض}} y = 2x+3 \Rightarrow f^{-1}(x) = 2x+3$$

حالا نمودار تابع را ۶ واحد به پایین منتقل می‌کنیم:

$$f^{-1}(x) - 6 = 2x + 3 - 6 = 2x - 3$$

۲۰۶ | ابتدا نمودار تابع را رسم می‌کنیم تا بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع در آن نزولی است را پیدا کنیم:

$$f(x) = -|x-1| + 2 = \begin{cases} (x-1) + 2 & ; x < 1 \\ -(x-1) + 2 & ; x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+1 & ; x < 1 \\ -x+3 & ; x \geq 1 \end{cases}$$

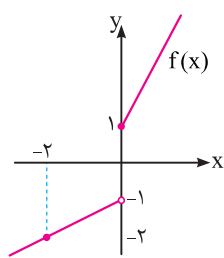


این تابع در بازه $x \geq 1$ اکیداً نزولی است و ضابطه آن به صورت $y = -x + 3$ است. پس ضابطه وارون آن در این بازه به صورت زیر به دست می‌آید:

$$y = -x + 3 \Rightarrow x = -y + 3 \xrightarrow{\text{تعویض جای } y \text{ و } x} y^{-1} = -x + 3$$

از طرفی بُرد تابع f در بازه نزولی برابر بازه $(-\infty, 2]$ است، پس:

$$y^{-1} = -x + 3; x \leq 2$$



۲۱۳ ابتدا تابع $f(x)$ را رسم می‌کنیم:

حال ضابطه وارون را برای هر قسمت به دست می‌آوریم:

$$y = 2x + 1 \Rightarrow y - 1 = 2x \Rightarrow x = \frac{y-1}{2} \xrightarrow{\text{تعویض جای } y, x} y = \frac{x-1}{2}$$

$$y = \frac{x}{2} - 1 \Rightarrow y + 1 = \frac{x}{2} \Rightarrow 2y + 2 = x \xrightarrow{\text{تعویض جای } y, x} y = 2x + 2$$

می‌دانیم برد تابع f برابر با دامنه f^{-1} است، پس:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{2} & ; x \geq 1 \\ 2x+2 & ; x < -1 \end{cases}$$

۲۱۴ آ) می‌دانیم $R_{f^{-1}} = D_f$, $D_{f^{-1}} = R_f$ است. و از طرفی در تابع

$f(x) = \sqrt{x-2}$ دامنه $D_f = [2, +\infty)$ و برد $R_f = [0, +\infty)$ است:

$$D_{f^{-1} \circ f} = D_f = [2, +\infty)$$

ب) با توجه به رابطه مقابل:

$$f^{-1}(5) = a \Rightarrow f(a) = 5$$

$$\sqrt{a-2} = 5 \Rightarrow a-2 = 25 \Rightarrow a = 27$$

بنابراین $f^{-1}(5) = 27$ است.

۲۱۵ آ) با توجه به نمودار، $(0, 1) \in f$ است، پس نتیجه می‌گیریم

$(1, 0) \in f^{-1}$ است. همچنین $(-2, 0) \in g$ است، پس نتیجه می‌گیریم

$$g^{-1}(f^{-1}(1)) = g^{-1}(0) = -2 \quad ; \quad (0, -2) \in g^{-1} \text{ است}$$

ب) می‌دانیم $(g \circ f)^{-1}(-2) = f^{-1}(g^{-1}(-2))$ است.

با توجه به نمودار، $(0, -2) \in g$ است، پس $(-2, 0) \in g^{-1}$ است.

همچنین $(2, 0) \in f$ است، پس $(0, 2) \in f^{-1}$ است. بنابراین:

$$f^{-1}(g^{-1}(-2)) = f^{-1}(0) = 2$$

۲۱۶ در توابع وارون پذیر، اگر $h(a) = b$ باشد، آن‌گاه $h^{-1}(b) = a$

است و برعکس.

آ) به جای محاسبه $(f \circ g)^{-1}(5) = a$ ، می‌توانیم حاصل $f \circ g(a) = 5$

$$f \circ g(a) = 5 \Rightarrow f(g(a)) = 5 \Rightarrow \frac{1}{\lambda} g(a) - 3 = 5 \Rightarrow \frac{1}{\lambda} g(a) = 8 \Rightarrow g(a) = 8\lambda$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\lambda} a^2 - 3 = 8 \Rightarrow \frac{1}{\lambda} a^2 = 11 \Rightarrow a^2 = 11\lambda \Rightarrow a = \sqrt{11\lambda}$$

ب) به جای محاسبه $(f^{-1} \circ f^{-1})(6) = (f \circ f)^{-1}(6) = a$ ، می‌توانیم

حاصل $f \circ f(a) = 6$ را به دست آوریم:

$$f \circ f(a) = 6 \Rightarrow f(f(a)) = 6 \Rightarrow \frac{1}{\lambda} f(a) - 3 = 6 \Rightarrow \frac{1}{\lambda} f(a) = 9 \Rightarrow f(a) = 9\lambda$$

$$\Rightarrow f(a) = 9\lambda \Rightarrow \frac{1}{\lambda} a - 3 = 9\lambda \Rightarrow \frac{1}{\lambda} a = 9\lambda + 3 \Rightarrow a = \lambda(9\lambda + 3) = 9\lambda^2 + 3\lambda$$

با توجه به نمودار تابع f ، تابع در بازه $(-\infty, 0]$ اکیداً نزولی است و ضابطه وارون تابع در این بازه به صورت زیر است:

$$f(x) = -x^2 \Rightarrow y = -x^2 \Rightarrow -y = x^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{-y} = x \xrightarrow{\text{تعویض جای } y, x} y = \sqrt{-x} \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{-x}$$

۲۱۰ می‌دانیم $(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ ، پس $f(x)$ را می‌توان

به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$f(x) = (x+1)^3 - 1$$

حالا برای پیدا کردن ضابطه وارون، باید x را بر حسب y بیابیم و سپس جای x و y را عوض کنیم:

$$y = (x+1)^3 - 1 \Rightarrow (x+1)^3 = y+1 \xrightarrow{\sqrt[3]{}} x+1 = \sqrt[3]{y+1}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt[3]{y+1} - 1 \xrightarrow{\text{جای } x \text{ و } y \text{ عوض}} y = \sqrt[3]{x+1} - 1$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+1} - 1$$

۲۱۱ برای محاسبه تابع وارون، باید x را در یک طرف ضابطه تابع

تنها کنیم.

سپس جای x و y را عوض می‌کنیم:

$$f(x) = x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 - 4 \Rightarrow y = (x-1)^2 - 4$$

$$\Rightarrow y+4 = (x-1)^2 = \sqrt{y+4} = |x-1|$$

$$\xrightarrow{x \geq 1} \sqrt{y+4} = x-1 \Rightarrow x = \sqrt{y+4} + 1$$

$$\xrightarrow{\text{تعویض جای } y, x} y = \sqrt{x+4} + 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x+4} + 1$$

حالا معادله موردنظر را حل می‌کنیم:

$$g(x) = f^{-1}(x) \Rightarrow \frac{x-9}{2} = \sqrt{x+4} + 1$$

$$\Rightarrow x-9 = 2\sqrt{x+4} + 2 \Rightarrow x-11 = 2\sqrt{x+4}$$

$$\Rightarrow (x-11)^2 = 4x+16 \Rightarrow x^2 - 22x + 121 = 4x+16$$

$$\Rightarrow x^2 - 26x + 105 = 0 \Rightarrow (x-5)(x-21) = 0$$

$$\Rightarrow x = 5 \text{ یا } x = 21$$

۲۱۲ اگر نمودار دو تابع نسبت به خط $y = x$ قرینه باشند، آن دو تابع

وارون یکدیگر هستند، پس:

$$y = 2 + \sqrt{x-1} \Rightarrow y-2 = \sqrt{x-1}$$

$$\Rightarrow (y-2)^2 = x-1 \Rightarrow x = (y-2)^2 + 1$$

$$\xrightarrow{\text{تعویض جای } y, x} y = (x-2)^2 + 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = (x-2)^2 + 1$$

حال نمودار حاصل را انتقال می‌دهیم:

$$y = (x-2)^2 + 1 \xrightarrow{\text{سمت راست واحد به } 2} y = ((x-2)-2)^2 + 1$$

$$= (x-4)^2 + 1 \xrightarrow{\text{سمت پایین واحد به } 2} y = (x-4)^2 - 2$$

$$\Rightarrow g(x) = (x-4)^2 - 2$$

۸۱۳ | نادرست

توضیح: مرکز دایره $O(1, 1)$ است.

۸۱۴ | نادرست

توضیح: $a^2 + b^2 - 4c > 0$

۸۱۵ | درست

۸۱۶ | نادرست

توضیح: $3^2 + (-2)^2 + 2(3) = 19 \neq 0$

۸۱۷ | نادرست

توضیح: بیرون دایره است.

۸۱۸ | درست

۸۱۹ | نادرست

توضیح: دو دایره متقاطع‌اند.

۸۲۰ | نادرست

توضیح: برای این که متقاطع باشند، باید $|r - r'| < d < r + r'$ باشد.

۸۲۱ | ۲

توضیح:

$$R = \frac{1}{4} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{4} \sqrt{(-2)^2 + 0^2 - 4(-3)} = \frac{1}{4} (4) = 1$$

$$R = \sqrt{4} = 2, O(2, -3) \quad | \quad ۸۲۲$$

۸۲۳ | خط المرکزین

۸۲۴ | هم‌مرکز

۸۲۵ | مماس داخل

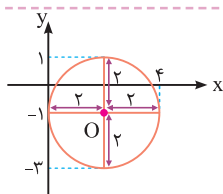
$$O(-\frac{a}{4}, -\frac{b}{4}) = (1, 0) \quad | \quad ۸۲۶$$

۸۲۷ | شعاع

$$d = r_1 + r_2 \quad | \quad ۸۲۸$$

$$O(-\frac{a}{4}, -\frac{b}{4}) = (3, -1) \quad | \quad ۸۲۹$$

$$R = \frac{1}{4} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{4} \sqrt{(-6)^2 + 2^2 - 4(6)} \\ = \frac{1}{4} \sqrt{36 + 4 - 24} = \frac{1}{4} \times \sqrt{16} = 1$$



۸۳۰ | **آ** در دایره $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 4$ مختصات مرکز به صورت $O(2, -1)$ و شعاع دایره برابر $R = 2$ است و داریم:

ب در دایره $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ مختصات مرکز و شعاع به صورت زیر به دست می‌آید:

$$O(-\frac{a}{4}, -\frac{b}{4}) = (\frac{2}{4}, \frac{0}{4}) = (1, 0)$$

۸۳۶ | دایره از ۳ نقطه $(۰, ۶)$ و $(۰, -۴)$ و $(-۲, ۰)$ گذشته است. با جای‌گذاری آن‌ها در معادله داریم:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

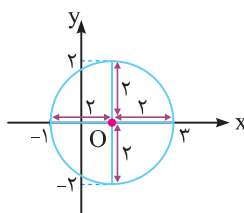
$$\Rightarrow \begin{cases} (۰, ۶): ۳۶ + ۶b + c = 0 \Rightarrow ۶b + c = -۳۶ & (۱) \\ (۰, -۴): ۱۶ - ۴b + c = 0 \Rightarrow -۴b + c = -۱۶ & (۲) \\ (-۲, ۰): ۴ - ۲a + c = 0 \Rightarrow -۲a + c = -۴ & (۳) \end{cases}$$

با حل دستگاه معادلات (۱) و (۲) داریم: $b = -۲$ و $c = -۲۴$

حال با جای‌گذاری $c = -۲۴$ در رابطه (۳) داریم:

$$-۲a - ۲۴ = -۴ \Rightarrow a = -۱۰$$

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{2} \sqrt{(-۱۰)^2 + (-۲)^2 - 4(-۲۴)} = \frac{1}{2} \sqrt{۱۶۰} = ۲$$



۸۳۱ | در دایره $x^2 + y^2 + ۲x + ۲y - ۸ = 0$ مختصات مرکز و شعاع به صورت زیر به دست می‌آید:

$$O(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}) = (-\frac{۲}{2}, -\frac{۲}{2}) = (-۱, -۱)$$

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{2} \sqrt{۲^2 + ۲^2 - 4(-۸)} = \frac{1}{2} \sqrt{۴۰} = \sqrt{۱۰}$$

بنابراین معادله استاندارد این دایره به صورت زیر است:

$$(x+۱)^2 + (y+۱)^2 = (\sqrt{۱۰})^2 \Rightarrow (x+۱)^2 + (y+۱)^2 = ۱۰$$

۸۳۷ | ابتدا مرکز و شعاع دایره‌ای به معادله $x^2 + y^2 - ۱۰x + ۲y - ۲ = 0$ را می‌یابیم:

$$O(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}) = (۵, -۱)$$

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{2} \sqrt{۱۰۰ + ۴ - 4(-۲)} = \frac{1}{2} \sqrt{۱۱۲} = \sqrt{۲۸}$$

پس جواب‌های نامعادله، نقاط داخل دایره‌ای به مرکز $O(۵, -۱)$ و شعاع $\sqrt{۲۸}$ را نشان می‌دهد.

$$OM = R = \sqrt{(۱+۲)^2 + (-۱-۳)^2} = \sqrt{۹ + ۱۶} = ۵ \quad ۸۳۸$$

$$O(-۲, ۳)$$

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2 \quad \text{معادله دایره}$$

$$\Rightarrow (x+۲)^2 + (y-۳)^2 = ۲۵$$

۸۳۹ | مرکز دایره وسط A و B می‌باشد، پس:

$$O(-\frac{۲+۴}{2}, -\frac{۱+۱}{2}) = (۱, ۰)$$

فاصله مرکز دایره از نقطه $A(۴, -۱)$ برابر شعاع دایره است.

$$OA = R \Rightarrow R = \sqrt{(۴-۱)^2 + (-۱-۰)^2} = \sqrt{۱۰}$$

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2 \quad \text{معادله دایره}$$

$$\Rightarrow (x-۱)^2 + (y-۰)^2 = (\sqrt{۱۰})^2 \Rightarrow (x-۱)^2 + y^2 = ۱۰$$

$$O(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}) = (۲, -۳) \quad ۸۴۰$$

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{2} \sqrt{۱۶ + ۳۶ - 4(۱۲)} = \frac{1}{2} \sqrt{۴} = ۱$$

پس مرکز دایره $O(۲, -۳)$ و شعاع دایره موردنظر برابر $R = ۱$ است.

می‌باشد و معادله دایره برابر است با:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2 \Rightarrow (x-۲)^2 + (y+۳)^2 = ۴$$

$$O(x, ۲x), A(۴, ۱), B(-۲, ۳) \quad ۸۴۱$$

فاصله نقطه‌های A و B روی دایره، از مرکز دایره برابر با R است. پس:

$$OA = OB \Rightarrow \sqrt{(x-۴)^2 + (۲x-۱)^2} = \sqrt{(x+۲)^2 + (۲x-۳)^2}$$

۸۳۳ | مختصات مرکز به فرم روبه‌رو است:

$$O(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}) = (-\frac{a}{2}, ۳)$$

این مختصات باید در خط $۲x - y - ۱ = 0$ صدق کند:

$$۲(-\frac{a}{2}) - ۳ - ۱ = 0 \Rightarrow a = -۴$$

برای پیدا کردن شعاع، داریم:

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{2} \sqrt{(-۴)^2 + (-۶)^2 - 4(-۱۲)} = \frac{1}{2} \times ۱۰ = ۵$$

۸۳۴ | برای این که دایره باشد، باید $a^2 + b^2 - 4c > 0$ باشد:

$$(-۲)^2 + ۶^2 - 4k > 0 \Rightarrow ۴۰ - 4k > 0 \Rightarrow ۴k < ۴۰ \Rightarrow k < ۱۰$$

۸۳۵ | برای پیدا کردن محل برخورد با محور xها، $y = 0$ قرار می‌دهیم:

$$(x+۱)^2 + y^2 = ۴ \xrightarrow{y=0} (x+۱)^2 = ۴ \Rightarrow x+۱ = \pm ۲ \Rightarrow x = ۱, -۳$$

و برای پیدا کردن محل برخورد با محور yها، $x = 0$ قرار می‌دهیم.

$$(x+۱)^2 + y^2 = ۴ \xrightarrow{x=0} ۱ + y^2 = ۴ \Rightarrow y^2 = ۳ \Rightarrow y = \pm \sqrt{۳}$$

۸۴۴ | آ | شعاع دایره برابر است با فاصله نقطه $O(-1, 2)$ تا خط

$$4y - 3x - 1 = 0$$

$$OH = R = \frac{|4(2) - 3(-1) - 1|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{10}{5} = 2$$

(ب)

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2 \Rightarrow (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$$

۸۴۵ | ابتدا شعاع دایره را پیدا می‌کنیم. شعاع دایره برابر فاصله مرکز دایره

یعنی نقطه $O(1, -2)$ تا خط $4x - 3y - 25 = 0$ است:

$$OH = R = \frac{|4(1) - 3(-2) - 25|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{15}{5} = 3$$

بنابراین معادله دایره به صورت زیر است:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2 \Rightarrow (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$$

۸۴۶ | محل برخورد دو قطر، مختصات مرکز دایره را می‌دهد؛ پس با حل

دستگاه داریم:

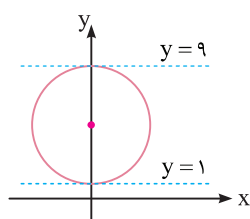
$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 3 \end{cases} \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2, y = -1 \Rightarrow O(2, -1)$$

باتوجه به این‌که خط $4x + 3y + 5 = 0$ بر دایره مماس است، شعاع دایره را به دست می‌آوریم.

$$OH = R = \frac{|4(2) + 3(-1) + 5|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{10}{5} = 2$$

معادله دایره‌ای به مرکز $O(2, -1)$ و شعاع $R = 2$ برابر است با:

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 4$$



۸۴۷ | چون دایره بر این دو خط

موازی مماس است، عرض مرکز روی

خط $y = \frac{1+9}{2} = 5$ است و فاصله

این ۲ خط برابر قطر دایره است.

$$2R = 8 \Rightarrow R = 4$$

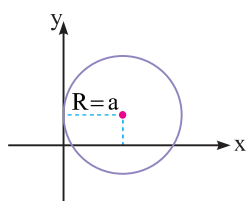
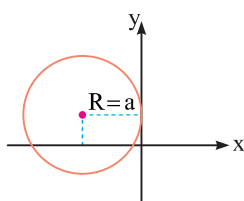
چون مرکز روی محور y قرار دارد، پس طول مرکز برابر صفر است و با توجه به این‌که عرض مرکز برابر ۵ بود، مختصات مرکز به صورت $O(0, 5)$ است.

معادله دایره‌ای با مرکز $O(0, 5)$ و شعاع $R = 4$ را می‌نویسیم:

$$(x - 0)^2 + (y - 5)^2 = 16 \Rightarrow x^2 + (y - 5)^2 = 16$$

۸۴۸ | با توجه به این‌که دایره بر محور y ها مماس است، از شکل

مشخص است که شعاع برابر $|a|$ است: $|a| = 5 \Rightarrow a = \pm 5$



حالا طرفین معادله را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$x^2 - 8x + 16 + 4x^2 + 1 - 4x = x^2 + 4x + 4 + 4x^2 + 9 - 4x \Rightarrow 4 = 4x \Rightarrow x = 1$$

پس مختصات مرکز دایره $O(1, 2)$ است و شعاع آن برابر است با:

$$R = OA = \sqrt{(1-4)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{10}$$

پس معادله دایره برابر است با:

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = (\sqrt{10})^2 = 10$$

۸۴۲ | اگر فرض کنیم طول مرکز برابر α باشد، چون مرکز روی $y = x + 2$

قرار دارد، عرض آن به صورت $y = \alpha + 2$ به دست می‌آید و در نتیجه $O(\alpha, \alpha + 2)$ خواهد بود.

فاصله مرکز از هر ۲ نقطه A و B برابر با شعاع خواهد بود:

$$R = OA = OB$$

$$\Rightarrow \sqrt{(\alpha - (-1))^2 + (\alpha + 2 - 2)^2} = \sqrt{(\alpha - 3)^2 + (\alpha + 2 - 2)^2}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} \alpha^2 + 2\alpha + 1 + \alpha^2 = \alpha^2 - 6\alpha + 9 + \alpha^2 \Rightarrow \alpha = 1$$

باتوجه به این‌که مرکز به صورت $O(\alpha, \alpha + 2)$ است، با جای‌گذاری $\alpha = 1$ ،

مرکز به صورت $O(1, 3)$ به دست می‌آید.

در ضمن فاصله مرکز $O(1, 3)$ تا نقطه $A(-1, 2)$ برابر شعاع دایره است:

$$OA = R = \sqrt{(-1-1)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

معادله دایره‌ای به مرکز $O(1, 3)$ و شعاع $R = \sqrt{5}$ را می‌نویسیم:

$$(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 5$$

۸۴۳ | باید سه نقطه $A(0, 6)$ ، $B(-4, 0)$ و $C(1, 5)$ ، ۳ نقطه از یک

دایره باشند و مرکز دایره از این ۳ نقطه فاصله یکسانی دارد. با جای‌گذاری

این ۳ نقطه در معادله داریم:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

$$A(0, 6): 0^2 + 6^2 + a(0) + b(6) + c = 0 \Rightarrow 6b + c = -36 \quad (1)$$

$$B(-4, 0): (-4)^2 + 0^2 + a(-4) + b(0) + c = 0 \Rightarrow -4a + c = -16 \quad (2)$$

$$C(1, 5): 1^2 + 5^2 + a(1) + b(5) + c = 0 \Rightarrow a + 5b + c = -26 \quad (3)$$

$$(1) - (3): \begin{cases} b - a = -10 \\ 4b - 4a = -40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b - a = -10 \\ 10b = -40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -4 \\ a = 6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = -4 \\ a = 6 \\ c = 0 \end{cases}$$

پس معادله دایره به صورت $x^2 + y^2 + 6x - 4y = 0$ می‌باشد.

و مختصات مرکز دایره به صورت $O(-3, 2)$ می‌باشد.

۸۵۲ | مختصات مرکز و شعاع دایره را پیدا می‌کنیم:

$$O(-\frac{a}{r}, -\frac{b}{r}) = (2, -1)$$

$$R = \frac{1}{r} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{r} \sqrt{(-4)^2 + 2^2 - 4(-4)} = \frac{1}{r} \sqrt{36} = 3$$

ب) خیر قرار ندارد، زیرا در معادله دایره صدق نمی‌کند.

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$$

$$0^2 + 3^2 - 4(0) + 2(3) - 4 = 11 \neq 0$$

$$O(-\frac{a}{r}, -\frac{b}{r}) = (1, -2)$$

۸۵۳ |

$$R = \frac{1}{r} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{r} \sqrt{4 + 16 - 4} = 2$$

$$A(-1, -2) \Rightarrow OA = \sqrt{(1+1)^2 + (-2+2)^2} = 2$$

باتوجه به این که $OA = R$ می‌باشد، پس نقطه A روی محیط دایره قرار دارد.

۸۵۴ | باید فاصله $p(-2, k)$ تا مرکز دایره از شعاع دایره بزرگ‌تر باشد.

مختصات مرکز و شعاع را به شکل زیر به دست می‌آوریم:

$$O(-\frac{a}{r}, -\frac{b}{r}) = (1, -2)$$

$$r = \frac{1}{r} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{r} \sqrt{(-2)^2 + 4^2 - 4(-20)} = \frac{1}{r} \times 10 = 5$$

فاصله نقطه $p(-2, k)$ تا $O(1, -2)$ برابر است با:

$$\sqrt{(x_p - x_1)^2 + (y_p - y_1)^2} = \sqrt{(-2-1)^2 + (k-(-2))^2} \\ = \sqrt{9 + (k+2)^2}$$

حال فاصله این نقطه را بزرگ‌تر از $r = 5$ قرار می‌دهیم:

$$\sqrt{9 + (k+2)^2} > 5 \Rightarrow 9 + (k+2)^2 > 25 \Rightarrow (k+2)^2 > 16$$

$$\Rightarrow k^2 + 4k + 4 > 16 \Rightarrow k^2 + 4k - 12 > 0$$

$$\Rightarrow (k+6)(k-2) > 0$$

$$\Rightarrow \frac{k}{(k+6)(k-2)} \quad \begin{array}{c|c|c|c} & -6 & & 2 \\ \hline & + & - & + \end{array}$$

پس مقادیر قابل قبول برای k به صورت بازه $(-\infty, -6) \cup (2, +\infty)$ است.

۸۵۵ | مرکز دایره برابر $O(2, -3)$ و شعاع دایره برابر $\sqrt{4} = 2$ می‌باشد.

فاصله مرکز دایره تا خط $y+1=0$ را به دست می‌آوریم و آن را با شعاع دایره ($R=2$) مقایسه می‌کنیم.

$$OH = \frac{|-3+1|}{\sqrt{0^2+1^2}} = 2 \Rightarrow OH = R = 2$$

پس خط بر دایره مماس است.

۸۵۶ | در دایره $x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$ مختصات مرکز و اندازه شعاع را پیدا می‌کنیم.

$$O(-\frac{a}{r}, -\frac{b}{r}) = (\frac{0}{r}, \frac{2}{r}) = (0, 1)$$

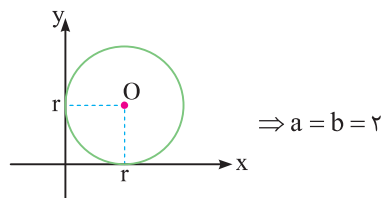
$$R = \frac{1}{r} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{r} \sqrt{0^2 + (-2)^2 - 4(-3)} = \frac{1}{r} \sqrt{16} = 2$$

۸۴۹ | چون دایره در ربع اول بر هر دو محور مختصات مماس است،

پس مختصات مرکز دایره به صورت $O(r, r)$ است. یعنی $a = b = r$

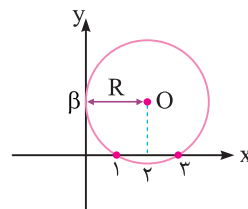
است. حالا چون مرکز دایره روی خط $2x + y = 6$ قرار دارد، پس در آن

صدق می‌کند: $O(r, r): 2r + r = 6 \Rightarrow 3r = 6 \Rightarrow r = 2$



۸۵۰ | چون دایره از ۲ نقطه هم عرض $(3, 0)$ و $(1, 0)$ می‌گذرد، طول

مرکز برابر با $\frac{1+3}{2} = 2$ است. پس می‌توان مرکز را به صورت $O(2, \beta)$ نشان داد.



از طرفی چون دایره بر محور y ها

مماس است، $R = |\alpha|$ است، پس

$R = 2$ می‌باشد. (به شکل دقت کنید)

چون شعاع برابر ۲ است، فاصله $O(2, \beta)$ تا هر یک از نقطه‌ها، مثلاً نقطه $(1, 0)$ هم برابر ۲ است:

$$R = \sqrt{(2-1)^2 + (\beta-0)^2} = 2 \xrightarrow{\text{توان}} 1 + \beta^2 = 4 \Rightarrow \beta = \pm\sqrt{3}$$

با توجه به شکل، عرض مرکز مثبت است، پس $\beta = \sqrt{3}$ قابل قبول است و مختصات مرکز به صورت $O(2, \sqrt{3})$ است.

۸۵۱ | گزینه «۲»

برای بررسی دقیق‌تر، وضعیت هریک از این نقطه‌ها را با دایره بررسی می‌کنیم. در دایره $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ مختصات مرکز و طول شعاع دایره برابر است با:

$$O(-\frac{a}{r}, -\frac{b}{r}) = (\frac{2}{r}, -\frac{4}{r}) = (1, -2)$$

$$R = \frac{1}{r} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{r} \sqrt{(-2)^2 + 4^2 - 4(1)} = \frac{1}{r} \sqrt{16} = 2$$

حالا فاصله هریک از نقطه‌ها را تا مرکز دایره پیدا می‌کنیم:

$$1) A(0, 0): OA = \sqrt{(1-0)^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow OA > R \Rightarrow \text{بیرون دایره}$$

$$2) B(1, 0): OB = \sqrt{(1-1)^2 + (-2-0)^2} = 2$$

$$\Rightarrow OB = R \Rightarrow \text{روی دایره}$$

$$3) C(0, -1): OC = \sqrt{(1-0)^2 + (-2+1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow OC < R \Rightarrow \text{درون دایره}$$

$$4) D(-1, 0): OD = \sqrt{(1+1)^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{8}$$

$$\Rightarrow OD > R \Rightarrow \text{بیرون دایره}$$

و برای به‌دست آوردن محل تلاقی آن با محور y ‌ها کافی است در معادله دایره $x = 0 \Rightarrow y = 4$ قرار دهیم و y را به‌دست آوریم.

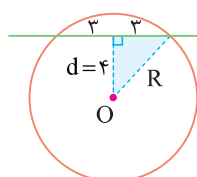
$$\begin{aligned} x^2 + (y-1)^2 &= 9 \\ y-1 &= 3 \Rightarrow y = 4 \\ y-1 &= -3 \Rightarrow y = -2 \end{aligned}$$

یعنی دایره محور y ‌ها را در نقاطی به عرض -2 و 4 قطع می‌کند.

۸۵۹ | فاصله $O(2, -3)$ تا خط $3x - 4y + 2 = 0$ را پیدا می‌کنیم:

$$d = \frac{|3(2) - 4(-3) + 2|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{20}{5} = 4$$

حالا با توجه به شکل مقابل با استفاده از فیثاغورس داریم:



$$R = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

معادله دایره‌ای به مرکز $O(2, -3)$ و $R = 5$ به شکل زیر است:

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 25$$

۸۶۰ | محل برخورد دو قطر مختصات مرکز دایره را می‌دهد، پس با حل دستگاه داریم:

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=3 \end{cases} \Rightarrow 2x=4 \Rightarrow x=2, y=-1 \Rightarrow O(2, -1)$$

$$OH = \frac{|2+(-1)-2|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

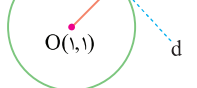
در مثلث OHB رابطه فیثاغورس را می‌نویسیم تا شعاع دایره را به‌دست آوریم.

$$R^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + (\sqrt{2})^2 \Rightarrow R^2 = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2} \Rightarrow R = \sqrt{\frac{5}{2}}$$

معادله دایره‌ای به مرکز $O(2, -1)$ و شعاع $R = \sqrt{\frac{5}{2}}$ برابر است با:

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = \frac{5}{2}$$

۸۶۱ | در دایره $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 3 = 0$ مختصات مرکز به صورت مقابل است:



$$O(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}) = (1, 1)$$

$$\text{شیب } OA = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-1}{2-1} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\text{شیب خط } d = -\frac{1}{2}$$

$$d \text{ معادله خط: } y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 3 = -\frac{1}{2}(x - 2)$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 4$$

آ | حالا فاصله مرکز دایره را تا خط $3x + 4y = 0$ پیدا می‌کنیم:

$$OH = \frac{|3(0) + 4(1)|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{4}{5} = \frac{4}{5}$$

چون فاصله مرکز دایره تا خط، کمتر از شعاع دایره است ($OH < R$) پس خط و دایره متقاطع‌اند.

ب | ابتدا فاصله $O(0, 1)$ را تا خط $x + y - 7 = 0$ به‌دست می‌آوریم

(OH) و آن را با شعاع دایره مقایسه می‌کنیم.

$$OH = \frac{|0+1-7|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$$

چون فاصله مرکز دایره تا این خط بیشتر از شعاع دایره است ($OH > R$)، پس خط و دایره متقاطع نیستند.

۸۵۷ | ابتدا مختصات مرکز و شعاع دایره $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 3 = 0$ را پیدا می‌کنیم:

$$O(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}) \Rightarrow O(\frac{6}{2}, \frac{4}{2}) \Rightarrow O(3, 2)$$

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{2}\sqrt{(-6)^2 + (-4)^2 - 4(-3)} = \frac{1}{2}\sqrt{64} = 4$$

حالا مطابق شکل، برای پیدا کردن فاصله دو نقطه A و B ابتدا فاصله مرکز دایره تا خط $x - y + 2 = 0$ را به‌دست می‌آوریم:



$$OH = \frac{|3-2+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

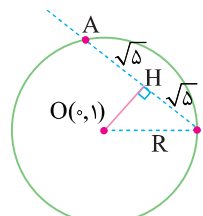
حالا با کمک فیثاغورس در مثلث OBH داریم:

$$(OB)^2 = (OH)^2 + (BH)^2 \Rightarrow 4^2 = \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 + (BH)^2$$

$$(BH)^2 = 16 - \frac{9}{2} = \frac{46}{2} \Rightarrow BH = \frac{\sqrt{46}}{2}$$

بنابراین فاصله دو نقطه A و B برابر $2 \times \frac{\sqrt{46}}{2} = \sqrt{46}$ است.

۸۵۸ |



$$OH = \frac{|3(0) + 4(1) + 6|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{10}{5} = 2$$

در مثلث OHB با نوشتن رابطه فیثاغورس و این‌که $AB = 2\sqrt{5} \rightarrow HB = \sqrt{5}$ می‌باشد، را به‌دست می‌آوریم.

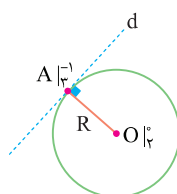
$$R^2 = (OH)^2 + (HB)^2$$

$$\Rightarrow R^2 = 2^2 + (\sqrt{5})^2 \Rightarrow R^2 = 9 \Rightarrow R = 3$$

پس معادله دایره به صورت $(x-0)^2 + (y-1)^2 = 9$ می‌باشد.

۸۶۲ | ابتدا شیب خط گذرنده از مرکز دایره

و نقطه A را پیدا می‌کنیم. سپس با توجه به این‌که خط OA و خط d بر هم عمودند، شیب خط d را پیدا می‌کنیم:



$$m_{OA} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - 2}{3 - 1} = \frac{1}{2} = -1$$

$$\overrightarrow{OA} \perp d \Rightarrow m_d = -\frac{1}{m_{OA}} = -2$$

آ چون نقطه A روی خط مماس d قرار دارد، پس معادله خط مماس به صورت مقابل است:

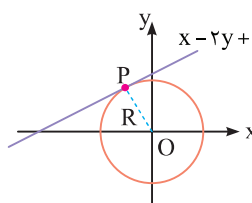
ب) معادله دایره: $R = OA = \sqrt{(-1-0)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{2}$

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$$

$$\Rightarrow (x - 0)^2 + (y - 2)^2 = (\sqrt{2})^2 \Rightarrow x^2 + (y - 2)^2 = 2$$

۸۶۳ | می‌دانیم اگر خطی بر دایره مماس باشد، آن‌گاه در نقطه تماس،

شعاع بر خط مماس، عمود است. از آنجایی که شیب خط $x - 2y + 5 = 0$ برابر $m = \frac{1}{2}$ است، پس شیب خط منطبق بر شعاع OP برابر -2 است.



چون خط منطبق بر OP از مبدأ مختصات می‌گذرد، پس معادله آن به صورت $y = -2x$ است. حالا نقطه تماس P را از تقاطع دو خط $y = -2x$ و $x - 2y + 5 = 0$ پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases} y = -2x \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} = -2x \Rightarrow \frac{5}{2}x = -\frac{5}{2} \Rightarrow x = -1 \Rightarrow y = 2$$

بنابراین مختصات نقطه تماس به صورت $P(-1, 2)$ است.

۸۶۴ | $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} O(-1, 2) \\ R = \sqrt{1} = 1 \end{cases}$

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} O'(1, -2) \\ R' = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 16 - 4} = 2 \end{cases}$$

$$OO' = \sqrt{(1+1)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

باتوجه به رابطه $OO' > R + R'$ ، دو دایره متخارج‌اند.

۸۶۵ | ابتدا مختصات مرکز و طول شعاع هریک از دایره‌ها را پیدا می‌کنیم:

در دایره $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ داریم:

$$O_1(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}) = (\frac{2}{2}, -\frac{4}{2}) = (1, -2)$$

$$R_1 = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2 + 4^2 - 4(-4)}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{4 + 16 + 16} = 3$$

در دایره $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 11 = 0$ داریم:

$$O_2(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}) = (-\frac{2}{2}, \frac{4}{2}) = (-1, 2)$$

$$R_2 = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{2}\sqrt{2^2 + (-4)^2 - 4(-11)}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{64} = 4$$

فاصله مرکزهای این دو دایره برابر است با:

$$d = O_1O_2 = \sqrt{(-1-1)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

با توجه به این که $|R_1 - R_2| < O_1O_2 < R_1 + R_2$ برقرار است، پس دو دایره متقاطع‌اند.

۸۶۶ | در دایره $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ مختصات مرکز و شعاع

دایره برابر است با:

$$O'(1, -2)$$

$$R' = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2 + 4^2 - 4(1)} = 2$$

در دایره C مختصات مرکز $O(-1, 2)$ و شعاع برابر $R = 1$ است، پس فاصله دو مرکز برابر است با:

$$OO' = \sqrt{(1+1)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

باتوجه به این‌که $OO' > R + R'$ ، پس دو دایره متخارج‌اند.

۸۶۷ | در دایره $x^2 + y^2 - 6x + 12y + 20 = 0$ مختصات مرکز و شعاع

دایره را پیدا می‌کنیم:

$$O'(3, -6)$$

$$R' = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{2}\sqrt{36 + 144 - 4(20)} = \frac{1}{2}\sqrt{100} = 5$$

در دایره C مرکز $O(0, 0)$ و شعاع برابر $R = 3$ است.

حالا طول خط‌المركزین یعنی OO' را به‌دست می‌آوریم.

$$OO' = \sqrt{(3-0)^2 + (-6-0)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

باتوجه به این‌که $|R - R'| < OO' < R + R'$ می‌باشد، پس دو دایره متقاطع‌اند.

۸۶۸ | در دایره $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0$ مختصات مرکز و شعاع

دایره برابر است با:

$$O'(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}) = (2, 3)$$

$$R' = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{2}\sqrt{16 + 36 + 12} = 4$$

فاصله مرکز $O(-1, -1)$ از مرکز $O'(2, 3)$ برابر است با:

$$OO' = \sqrt{(2+1)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$OO' = |R - R'| \Rightarrow 5 = |R - 4| \Rightarrow \begin{cases} R - 4 = 5 \Rightarrow R = 9 \checkmark \\ R - 4 = -5 \Rightarrow R = -1 \times \end{cases}$$

معادله دایره‌ای به مرکز $(-1, -1)$ و شعاع $R = 9$ برابر است با:

$$(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 81$$

۸۷۲

$$x^2 + y^2 - 2x + 2y + c = 0 \Rightarrow \begin{cases} O'(1, -1) \\ R' = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(-2)^2 + 2^2 - 4c} = \sqrt{2-c} \end{cases}$$

$$(x+1)^2 + (y-1)^2 = 2 \Rightarrow \begin{cases} O(-1, 1) \\ R = \sqrt{2} \end{cases}$$

$$OO' = \sqrt{(1+1)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

دو دایره مماس بیرون‌اند، پس داریم: $OO' = R + R'$

$$2\sqrt{2} = \sqrt{2} + \sqrt{2-c} \Rightarrow \sqrt{2} = \sqrt{2-c} \Rightarrow 2 = 2-c \Rightarrow c = 0$$

۸۷۳ در دایره C به معادله $x^2 + y^2 + 2x - 2y + m = 0$ مختصات

مرکز و شعاع برابر است با: $O(-1, 1)$

$$R = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2^2 + (-2)^2 - 4m} = \sqrt{2-m}$$

در دایره C' مرکز $O'(2, -3)$ و شعاع برابر $R' = 3$ است. فاصله دو مرکز برابر

$$OO' = \sqrt{(2+1)^2 + (-3-1)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

چون دو دایره مماس بیرون‌اند، پس: $OO' = R' + R$

$$5 = 3 + \sqrt{2-m} \Rightarrow 2 = \sqrt{2-m} \Rightarrow 2-m = 4 \Rightarrow m = -2$$

۸۶۹ مرکز و شعاع دایره $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 16$ برابر است با:

$$\begin{cases} O'(2, 3) \\ R' = \sqrt{16} = 4 \end{cases}$$

مرکز دایره موردنظر هم $O(0, 1)$ می‌باشد و شعاع دایره موردنظر را نیز

R در نظر می‌گیریم. باتوجه به اینکه دو دایره مماس داخل‌اند، پس:

$$OO' = |R - R'|$$

$$OO' = \sqrt{(2-0)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$R - 4 = 2\sqrt{2} \Rightarrow R = 2\sqrt{2} + 4$$

$$OO' = |R - R'| \Rightarrow 2\sqrt{2} = |R - 4| \Rightarrow \begin{cases} R - 4 = 2\sqrt{2} \Rightarrow R = 2\sqrt{2} + 4 \\ R - 4 = -2\sqrt{2} \Rightarrow R = 4 - 2\sqrt{2} \end{cases}$$

معادله دایره‌ای به مرکز $O(0, 1)$ و شعاع $R = 2\sqrt{2} + 4$:

$$(x-0)^2 + (y-1)^2 = (2\sqrt{2} + 4)^2$$

معادله دایره‌ای به مرکز $O(0, 1)$ و شعاع $R = 4 - 2\sqrt{2}$:

$$(x-0)^2 + (y-1)^2 = (4 - 2\sqrt{2})^2$$

دقت کنید مسئله دو جواب دارد.

۸۷۰ در دایره $x^2 + y^2 - 6x = 0$ مختصات مرکز و طول شعاع برابر

است با:

$$O'(3, 0)$$

$$R' = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{3^2 + 0 - 0} = 3$$

$$O(8, 0) \Rightarrow OO' = \sqrt{(8-3)^2 + (0-0)^2} = 5$$

در دو دایره مماس خارج رابطه $OO' = R + R'$ را داریم، پس:

$$5 = R + 3 \Rightarrow R = 2$$

معادله دایره‌ای به مرکز $O(8, 0)$ و شعاع $R = 2$ برابر است با:

$$(x-8)^2 + (y-0)^2 = 2^2 \Rightarrow (x-8)^2 + y^2 = 4$$

۸۷۱

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} O'(-1, 2) \\ R' = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2^2 + (-4)^2 - 4(1)} = 2 \end{cases}$$

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = m^2 \Rightarrow \begin{cases} O(2, -1) \\ R = |m| \end{cases}$$

$$OO' = \sqrt{(2+1)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$$

دو دایره مماس خارج‌اند، پس: $OO' = R + R'$

$$3\sqrt{2} = |m| + 2 \Rightarrow |m| = 3\sqrt{2} - 2 \Rightarrow \begin{cases} m = 3\sqrt{2} - 2 \\ m = -3\sqrt{2} + 2 \text{ (غق)} \end{cases}$$